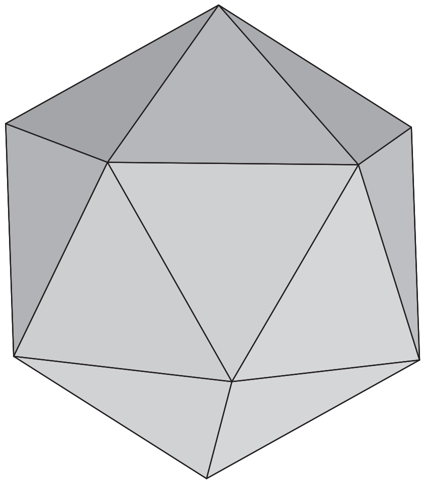
Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 5

Abgabetermin Donnerstag, den 25.11.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 2.3.3 – 2.4 im Vorlesungsmanuskript.

1. Bestimmen Sie Anzahl und Isomorphietyp der 5-Sylowuntergruppen von S_5.

2. Sei G die Symmetriegruppe des Ikosaeders



   (a) Basteln Sie einen Ikosaeder.

   (b) Bestimmen Sie die Gruppenordnung von G.

   (c) Bestimmen Sie für jeden Primteiler p von $|G|$ die Anzahl der p-Sylowuntergruppen von G, und interpretieren Sie die Sylowuntergruppen geometrisch.

3. Eine Gruppe G heißt einfach, wenn sie keine nichttrivialen Normalteiler hat (d.h. wenn $\{e\}$ und G selbst die einzigen Normalteiler sind).

   Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 84 gibt.

4. (a) Sei G eine endliche Gruppe und n_a die Anzahl der Elemente der Ordnung a. Zeigen Sie, dass die Summe
$$|G| = \sum_{a \text{ teilt } |G|} n_a$$
   durch Zusammenfassen von Termen der Klassengleichung von G entsteht.

   (b) Welche Klassengleichungen können für eine Gruppe G der Ordnung 10 auftreten? Bestimmen Sie auch jeweils die n_a.

5. (4 Zusatzpunkte) Betrachten Sie die Gruppe R der Drehsymmetrien des Ikosaeders.

   (a) Bestimmen Sie die Ordnung von R.

   (b) Beschreiben Sie die Elemente von R geometrisch.

   (c) Bestimmen Sie die Klassengleichung von R.

   (d) Zeigen Sie, dass R einfach ist.

   Hinweis: Diese Aufgabe können Sie auch mit Hilfe von GAP lösen.