Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 4

Abgabetermin Donnerstag, den 18.11.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 2.3 im Vorlesungsmanuskript.

1. Zeigen Sie, dass die Kleinsche Vierergruppe

$$V_4 = \{() \,, (1,2)\,(3,4)\,, (1,3)\,(2,4)\,, (1,4)\,(2,3)\}$$

ein Normalteiler der S_4 ist und für die Quotientengruppe gilt

$$S_4/V_4 \cong S_3$$

Hinweis: Interpretieren Sie diesen Isomorphismus geometrisch, indem Sie die S_4 als Symmetriegruppe des Tetraeders auffassen.

2. (a) Sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie: Ist $[G : H] = 2$, dann ist H ein Normalteiler in G.

   (b) Zeigen Sie: Die alternierende Gruppe

   $$A_4 = \{\sigma \in S_4 \mid \operatorname{sign} \sigma = 1\} \subset S_4$$

   ist ein Normalteiler in S_4 und $V_4 \subset A_4$. Beschreiben Sie den Normalteiler

   $$A_4/V_4 \subset S_4/V_4$$

   und den Isomorphismus

   $$(S_4/V_4)\,/\,(A_4/V_4) \cong S_4/A_4$$

3. Seien G und H Gruppen und $\varphi : H \to \operatorname{Aut}(G)$ ein Homomorphismus.

   (a) Zeigen Sie, dass $G \times H$ mit der Verknüpfung

   $$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot \varphi(h_1)(g_2)\,, h_1 \cdot h_2)$$

   zu einer Gruppe $G \rtimes_\varphi H$ wird. Diese Gruppe heißt semidirektes Produkt von G und H bezüglich φ.

   (b) Zeigen Sie, dass

   $$G \times \{e_H\} \subset G \rtimes_\varphi H$$

   ein Normalteiler ist, dass

   $$G \times \{e_H\} \cong G$$

   und

   $$(G \rtimes_\varphi H)\,/\,(G \times \{e_H\}) \cong H$$

   (c) Welche Gruppen erhält man für $G = \mathbb{Z}_3$, $H = \mathbb{Z}_2$ und φ definiert durch

   $$\varphi(\bar{1}) = (\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3, \quad \bar{a} \mapsto -\bar{a})$$

   bzw.

   $$\varphi(\bar{1}) = id_{\mathbb{Z}_3}$$

4. Sei H eine Untergruppe von G. Der Normalisator von H ist

$$N(H) = \left\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\right\}$$

Zeigen Sie:

(a) $H \subset N(H)$ ist ein Normalteiler.

(b) Bestimmen Sie den Normalisator $N(H)$ von $H = \langle (1,2,3) \rangle \subset S_4$.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer Gruppe G und einer Untergruppe $H \subset G$, sodass

$$N(H) \subsetneqq \left\{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H\right\}$$

Zeigen Sie, dass $\{g \in G \mid gHg^{-1} \subset H\}$ dann keine Untergruppe von G ist.

5. (4 Zusatzpunkte) Finden Sie mit Hilfe von GAP alle Konjugationsklassen von Untergruppen der S_4. Bestimmen Sie auch jeweils die Mächtigkeit der Konjugationsklassen und die Gruppenordnung der Elemente. Welche Untergruppen der S_4 sind Normalteiler?

   Interpretieren Sie die Konjugationsklassen von Untergruppen geometrisch, indem Sie die S_4 als Symmetriegruppe des Tetraeders T auffassen und Untergruppen als Stabilisatoren $\mathrm{Stab}(A)$ von Teilmengen von $A \subset T$ beschreiben.

   Hinweis: Verwenden Sie die GAP-Befehle

   - `SymmetricGroup`
   - `LatticeSubgroups`
   - `ConjugacyClassesSubgroups`
   - `Size`
   - `Representative`