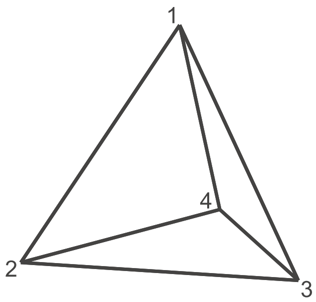
Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 3

Abgabetermin Donnerstag, den 11.11.2010 vor der Vorlesung.

1. (a) Zeigen Sie: Die Menge der Konjugationsklassen von S_n steht in Bijektion mit der Menge der Partitionen von n.

   (b) Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen der S_4 und interpretieren Sie die Konjugationsklassen geometrisch, indem Sie die S_4 als Symmetriegruppe des Tetraeders auffassen.

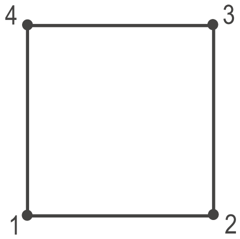


2. Sei $\varphi : G \longrightarrow F$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

   (a) Ist $M \subset F$ ein Normalteiler, dann ist $\varphi^{-1}(M) \subset G$ ein Normalteiler.

   (b) Ist φ surjektiv und $N \subset G$ ein Normalteiler, dann ist $\varphi(N) \subset F$ ein Normalteiler. Geben Sie ein Beispiel eines Gruppenhomomorphismus an, dessen Bild kein Normalteiler ist.

3. (a) Beschreiben Sie die Symmetriegruppe D_4 des Quadrats



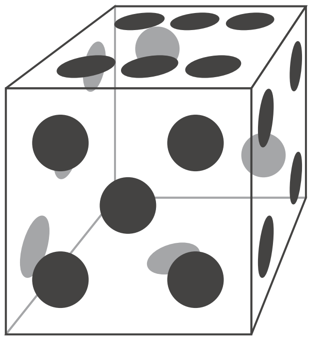
   als Untergruppe der S_4.

   (b) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

      i. Die Gruppe der inneren Automorphismen $\mathrm{Inn}(G)$ ist ein Normalteiler der Gruppe $\mathrm{Aut}(G)$ aller Automorphismen von G.

      ii. Bestimmen Sie für $G = S_3$ und $G = D_4$ jeweils $\mathrm{Inn}(G)$ und $\mathrm{Aut}(G)$ und die Quotientengruppe $\mathrm{Aut}(G) / \mathrm{Inn}(G)$.

4. Die Symmetriegruppe $G = \mathrm{Sym}(W)$ des Würfels W mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ lässt sich durch Nummerieren der Seiten



als Untergruppe der S_6 auffassen.

(a) Zeigen Sie, dass G von der Drehung

$$\alpha = (2, 3, 5, 4)$$

um 90° und der Drehspiegelung

$$\beta = (1, 5, 3, 6, 2, 4)$$

um 60° erzeugt wird, und diese Elemente die Relationen

$$\alpha^4 = e \qquad \beta^6 = e \qquad (\alpha\beta)^2 = e \qquad (\alpha^{-1}\beta^2)^2 = e$$

erfüllen.

(b) Welche Längen von Bahnen treten für die Operation $G \times W \to W$ auf, welche bei der induzierten Operation auf der Potenzmenge $G \times 2^W \to 2^W$?

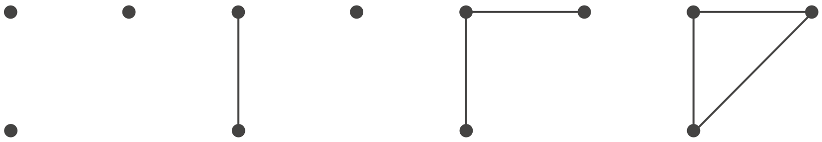
5. (4 Zusatzpunkte) Ein (ungerichteter) Graph ist ein Tupel (V, E) aus einer Menge V und einer Teilmenge $E \subset \binom{V}{2}$ der zweielementigen Teilmengen von V. Dann heißt V Knoten- oder Vertexmenge und E Kantenmenge (edges) des Graphen.

Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V_1 \to V_2$ gibt, sodass

$$\{v, w\} \in E_1 \Longleftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2$$

für alle $v, w \in V_1$.

Beispielsweise gibt es genau 4 Isomorphieklassen von Graphen mit 3 Knoten



Zeigen Sie, dass es genau 34 Isomorphieklassen von Graphen mit 5 Knoten gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die Operation der S_5 auf der Menge aller Graphen mit Knoten $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.