Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 15

0. Wiederholen Sie Abschnitt 7 im Vorlesungsmanuskript.

1. Konstruieren Sie das regelmäßige $3, 4, 5$ und 6-Eck mit Zirkel und Lineal.

2. Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine endliche Teilmenge mit $\{0,1\} \subset M$. Zeigen Sie:

   (a) Die Menge $\mathrm{Kon}\,(M) \subset \mathbb{C}$ der aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Punkte bildet einen Unterkörper, d.h. sind $a, b \in \mathrm{Kon}\,(M)$, $a \neq 0$ dann auch
   $$a + b,\ -b,\ a \cdot b,\ \frac{1}{a} \in \mathrm{Kon}\,(M)$$

   (b) $\mathrm{Kon}\,(M)$ ist quadratisch abgeschlossen, d.h. mit $a = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathrm{Kon}\,(M)$ ist auch $\sqrt{a} = \sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2} \in \mathrm{Kon}\,(M)$.

3. Sei
   $$a = e^{2\pi i/7} + e^{-2\pi i/7} = 2\,\mathrm{Re}\left(e^{2\pi i/7}\right)$$
   und
   $$f = x^3 + x^2 - 2x - 1$$
   Zeigen Sie:

   (a) a ist eine Nullstelle von p.

   (b) f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}\,[x]$.

   (c) Das reguläre 7-Eck läßt sich nicht mit Zirkel und Lineal aus $\{0, 1\}$ konstruieren.

4. Sei
   $$f = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Q}\,[x]$$

   (a) Zeigen Sie, dass f keine reelle Nullstelle hat und über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

   (b) Sei
   $$f = (x - a)\,(x - \overline{a})\,(x - b)\,\left(x - \overline{b}\right) \in \mathbb{C}\,[x]$$
   die Zerlegung von f in Linearfaktoren in $\mathbb{C}\,[x]$. Zeigen Sie, dass $\gamma = a\overline{a} + b\overline{b}$ eine Nullstelle von $x^3 - 4x - 1$ ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $a, \overline{a}, b, \overline{b}$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, jedoch
   $$[\mathbb{Q}\,(a) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}\,(\overline{a}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}\,(b) : \mathbb{Q}] = \left[\mathbb{Q}\left(\overline{b}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2^2$$

5. Sei $\varphi : R \to S$ ein Homomorphismus von faktoriellen Ringen und
   $$\tilde{\varphi} : R\,[x] \to S\,[x]\,,\ \tilde{\varphi}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{d} a_i x^i\right) = \textstyle\sum_{i=0}^{d} \varphi\,(a_i)\, x^i$$
   der induzierte Homomorphismus von Polynomringen.

   (a) Sei $f \in R\,[x]$ primitiv mit $\deg \tilde{\varphi}\,(f) = \deg f > 0$. Zeigen Sie: Ist f irreduzibel in $S\,[x]$, dann auch in $R\,[x]$.

   (b) Sei $f \in \mathbb{Z}\,[x]$ und p eine Primzahl, die den Leitkoeffizienten von f nicht teilt. Zeigen Sie: Ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}/p\,[x]$, dann auch in $\mathbb{Q}\,[x]$.