Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Übungsblatt 11

Abgabetermin Donnerstag, den 20.01.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 4.3 – 5 im Vorlesungsmanuskript.

1. Bestimmen Sie die Elementarteiler d_i von
$$G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3^2 \times \mathbb{Z}/3^2 \times \mathbb{Z}/3^5 \times \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/7$$
das heißt die Darstellung $G \cong \mathbb{Z}/d_1 \times ... \times \mathbb{Z}/d_r$ mit $d_i \geq 2$ und $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, ..., r-1$.

2. Sei
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{End}\left(\mathbb{C}^3\right)$$
   (a) Berechnen Sie die Smith-Normalform D von
   $$A = xE - B \in \mathbb{C}[x]^{3\times 3}$$
   und $S, T \in \operatorname{GL}(3, \mathbb{C}[x])$ mit $D = S \cdot A \cdot T$.

   (b) Bestimmen Sie daraus die Jordansche Normalform von B.

3. (a) Stellen Sie die Gruppentafel der Einheitengruppe $G = (\mathbb{Z}/14)^\times$ des Rings $\mathbb{Z}/14$ auf. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist und bestimmen Sie alle zyklischen Erzeuger. Geben Sie auch für jedes $g \in G$ seine Ordnung $\operatorname{ord}(g)$ an.

   (b) Sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n = |G| < \infty$. Zeigen Sie: Die Ordnung von g^j, $j \in \mathbb{N}$ ist
   $$\operatorname{ord}\left(g^j\right) = \frac{n}{\operatorname{ggT}(n, j)}$$

4. Der Fermatsche Primzahltest: n heißt Fermatsche Pseudoprimzahl zur Basis a, wenn n nicht prim ist, aber dennoch $a^n \equiv a \bmod n$ gilt. Bestimmen Sie mit Computerhilfe jeweils alle Pseudoprimzahlen $n \leq 1000$ zur Basis a mit $a = 2, 3, 5$ und vergleichen Sie deren Anzahl mit der Anzahl der Primzahlen. Hinweis: Maple-Funktionen `nextprime` und `mod`.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

   (a) Ein R-Modul M heißt noethersch, wenn er folgende äquivalente Bedingungen erfüllt:
      1. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln wird stationär.
      2. Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.
      3. Jede Teilmenge von Untermoduln enthält ein maximales Element.

      Zeigen Sie die Äquivalenz.

   (b) Sei
   $$0 \to U \xrightarrow{a} F \xrightarrow{\pi} M \to 0$$
   eine exakte Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie: F ist noethersch genau dann, wenn U und M noethersch sind.

   (c) Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie:
      1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist R^n ein noetherscher Modul.
      2. Jeder endlich erzeugte R-Modul ist schon endlich präsentiert.