

Einführung in die Algebra und Zahlentheorie

Übungsblatt 11

Abgabetermin Donnerstag, den 20.01.2010 vor der Vorlesung.

0. Wiederholen Sie Abschnitt 4.3 – 5 im Vorlesungsmanuskript.

1. Bestimmen Sie die Elementarteiler d_i von

$$G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3^2 \times \mathbb{Z}/3^2 \times \mathbb{Z}/3^5 \times \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/5 \times \mathbb{Z}/7$$

das heißt die Darstellung $G \cong \mathbb{Z}/d_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r$ mit $d_i \geq 2$ und $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, \dots, r-1$.

2. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$$

(a) Berechnen Sie die Smith-Normalform D von

$$A = xE - B \in \mathbb{C}[x]^{3 \times 3}$$

und $S, T \in \text{GL}(3, \mathbb{C}[x])$ mit $D = S \cdot A \cdot T$.

(b) Bestimmen Sie daraus die Jordansche Normalform von B .

3. (a) Stellen Sie die Gruppentafel der Einheitengruppe $G = (\mathbb{Z}/14)^\times$ des Rings $\mathbb{Z}/14$ auf. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist und bestimmen Sie alle zyklischen Erzeuger. Geben Sie auch für jedes $g \in G$ seine Ordnung $\text{ord}(g)$ an.

(b) Sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n = |G| < \infty$. Zeigen Sie: Die Ordnung von g^j , $j \in \mathbb{N}$ ist

$$\text{ord}(g^j) = \frac{n}{\text{ggT}(n, j)}$$

4. Der Fermatsche Primzahltest: n heißt Fermatsche Pseudoprimzahl zur Basis a , wenn n nicht prim ist, aber dennoch $a^n \equiv a \pmod{n}$ gilt. Bestimmen Sie mit Computerhilfe jeweils alle Pseudoprimzahlen $n \leq 1000$ zur Basis a mit $a = 2, 3, 5$ und vergleichen Sie deren Anzahl mit der Anzahl der Primzahlen. Hinweis: Maple-Funktionen `nextprime` und `mod`.

5. (4 Zusatzpunkte) Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Ein R -Modul M heißt noethersch, wenn er folgende äquivalente Bedingungen erfüllt:

1. Jede aufsteigende Kette von Untermoduln wird stationär.
2. Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.
3. Jede Teilmenge von Untermoduln enthält ein maximales Element.

Zeigen Sie die Äquivalenz.

(b) Sei

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{a} F \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R -Moduln. Zeigen Sie: F ist noethersch genau dann, wenn U und M noethersch sind.

(c) Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie:

1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist R^n ein noetherscher Modul.
2. Jeder endlich erzeugte R -Modul ist schon endlich präsentiert.