Einführung in die Algebra und Zahlentheorie
Präsenzübung

1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann heißt a kongruent zu b modulo m

$$a \equiv b \bmod m$$

wenn $m \mid (a-b)$. Zeigen Sie, dass kongruent modulo m eine Äquivalenzrelation ist und beschreiben Sie die Äquivalenzklassen.

2. Sei $P = \{p_1, ..., p_k\}$ eine endliche Menge von Primzahlen. Zeigen Sie

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} = \sum_{m \in M} \frac{1}{m}$$

mit

$$M = \{m \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid m \text{ hat nur Primfaktoren in } P\}$$

Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

3. Bestimmen Sie die Menge $L \subset \mathbb{Z}$ aller Lösungen x der simultanen Kongruenzen

$$x \equiv 1 \bmod 23$$
$$x \equiv 2 \bmod 118$$

4. Sei G eine Menge zusammen mit einer Verknüpfung

$$\circ: \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \mapsto & a \circ b \end{array}$$

die folgende Axiome erfüllt:

(G1) Assoziativität

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \ \forall a, b, c \in G$$

(G2') Es existiert ein linksneutrales Element, d.h. ein $e \in G$ mit

$$e \circ a = a \ \forall a \in G$$

(G3') Existenz des Linksinversen, d.h. $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G$ mit

$$a^{-1} \circ a = e$$

Zeigen Sie:

(a) Für $a, b \in G$ gilt: Ist $ab = e$, dann ist auch $ba = e$.

(b) Es ist $a \circ e = a \ \forall a \in G$.

(c) Das neutrale Element ist eindeutig.

(d) Das Inverse ist eindeutig.

(e) Für $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(f) Für $a \in G$ ist $(a^{-1})^{-1} = a$.

5. Sei $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ein Gruppenhomomorphismus und $e_i \in G_i$ jeweils das neutrale Element. Zeigen Sie:

   (a) $\varphi(e_1) = e_2$.

   (b) Für $a \in G_1$ gilt $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$.

   (c) Kern $\ker(\varphi) \subset G_1$ und Bild $\operatorname{Im}(\varphi) \subset G_2$ von φ sind Untergruppen.

   (d) Ist φ ein Isomorphismus, dann ist auch die Umkehrabbildung

   $$\varphi^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$$

   ein Gruppenisomorphismus.

6. Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{sign}: & S_n & \longrightarrow & (\{\pm 1\}, \cdot) \\ & \sigma & \longmapsto & \operatorname{sign}(\sigma) = \prod\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \end{array}$$

ein Gruppenepimorphismus ist. Bestimmen Sie den Kern von

$$\operatorname{sign} : S_3 \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$$