

# Parametrisierung rationaler Kurven

Janko Böhm

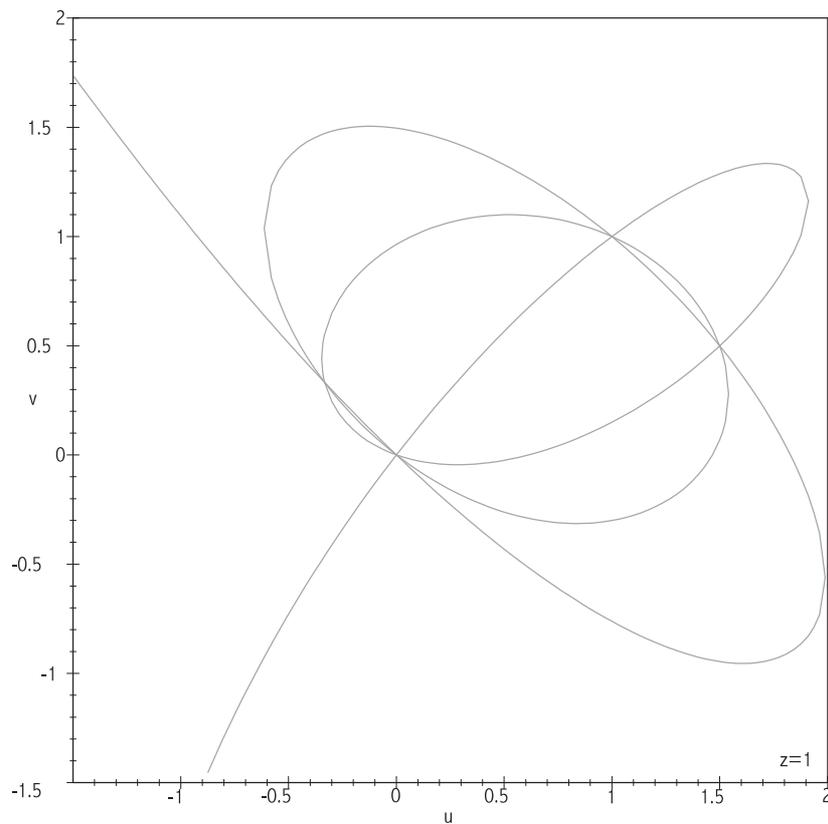
Diplomarbeit

am

Institut für Mathematik und Physik der Universität Bayreuth

betreut durch

Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer



Gleichung der rationalen Kurve auf der Titelseite:

$$\begin{aligned}
 & 2u^7 + u^6v + 3u^5v^2 + u^4v^3 + 2u^3v^4 + u^2v^5 + 2uv^6 + v^7 \\
 & - 7780247/995328u^6z - 78641/9216u^5vz - 10892131/995328u^4v^2z \\
 & - 329821/31104u^3v^3z - 953807/331776u^2v^4z - 712429/248832uv^5z \\
 & + 1537741/331776v^6z + 2340431/248832u^5z^2 + 5154337/248832u^4vz^2 \\
 & + 658981/41472u^3v^2z^2 + 1737757/124416u^2v^3z^2 \\
 & - 1234733/248832uv^4z^2 - 1328329/82944v^5z^2 - 818747/248832u^4z^3 \\
 & - 1822879/124416u^3vz^3 - 415337/31104u^2v^2z^3 \\
 & + 1002655/124416uv^3z^3 + 849025/82944v^4z^3 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Parametrisierung:

$$(u : v : z) =$$

$$\begin{aligned}
 & ( -6324578209345y_0^7 + 1021893387221628y_0^6y_1 \\
 & - 67705153953102797y_0^5y_1^2 + 2413936020780449384y_0^4y_1^3 \\
 & - 50385630890275418379y_0^3y_1^4 + 618549841783456745668y_0^2y_1^5 \\
 & - 4148014567927751691303y_0y_1^6 + 11746424186836712181144y_1^7 : \\
 & - 10208153640960y_0^7 + 1728706262544629y_0^6y_1 \\
 & - 120963580443373716y_0^5y_1^2 + 4578810390044983009y_0^4y_1^3 \\
 & - 101886524341292885824y_0^3y_1^4 + 1338233180172044707815y_0^2y_1^5 \\
 & - 9634449235519651619948y_0y_1^6 + 29390949548429238590595y_1^7 : \\
 & 7882665320448y_0^7 - 1076199878062080y_0^6y_1 \\
 & + 63199130919800832y_0^5y_1^2 - 2067218782675365888y_0^4y_1^3 \\
 & + 40639462331627298816y_0^3y_1^4 - 479792577361215320064y_0^2y_1^5 \\
 & + 3147664716788792057856y_0y_1^6 - 8847184297266383745024y_1^7 )
 \end{aligned}$$

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>I</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Nichtsinguläre Kurven</b>	<b>12</b>
2.1	Lokale Ringe . . . . .	12
2.2	Divisoren . . . . .	12
2.3	Satz von Riemann-Roch . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Blowups von Quasiprojektiven Varietäten</b>	<b>14</b>
3.1	Der $\sigma$ -Prozess im $\mathbb{P}_k^n$ . . . . .	14
3.2	Der lokale $\sigma$ -Prozess . . . . .	15
3.3	Iteration von $\sigma$ -Prozessen . . . . .	15
3.4	Das nichtsinguläre Modell einer Kurve . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Der lokale ganze Abschluß eines Unterrings</b>	<b>17</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	17
4.2	Anwendung auf $k(C)$ . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Singuläre Kurven</b>	<b>19</b>
5.1	Der ganze Abschluß des lokalen Rings . . . . .	19
5.2	Satz von Riemann-Roch . . . . .	20
5.3	Differentiale . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Zu den adjungierten Idealen einer singulären ebenen Kurve</b>	<b>21</b>
6.1	Definition . . . . .	21
6.2	Vorbemerkungen . . . . .	25
6.3	Wichtige adjungierte Ideale . . . . .	27
6.4	Berechnung adjungierter Ideale . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Saturierung</b>	<b>28</b>
7.1	Vorbemerkungen . . . . .	28
7.2	Saturierung in multiplikativ abgeschlossenen Mengen . . . . .	29
7.3	Saturierung in Idealen . . . . .	30
<b>8</b>	<b>Quadratische Transformationen</b>	<b>31</b>
<b>II</b>	<b>Konstruktive Verfahren</b>	<b>33</b>
<b>9</b>	<b>Konstruktion einer Ganzheitsbasis</b>	<b>33</b>
9.1	Vorbemerkungen . . . . .	33
9.2	Verfahren . . . . .	34
9.2.1	Voraussetzungen . . . . .	34
9.2.2	Ziel des Algorithmus . . . . .	35
9.2.3	Grundgerüst des Algorithmus . . . . .	35
9.2.4	Algorithmus zur Bestimmung von $b_d$ . . . . .	36

<b>10 Standardzerlegung der Singularitäten</b>	<b>45</b>
10.1 Der Umgebungsgraph einer ebenen Kurve . . . . .	45
10.2 Algorithmische Realisierung . . . . .	47
10.2.1 Standardzerlegung der Menge der Singularitäten . . . . .	47
10.2.2 Test ob ein Mehrfachpunkt gewöhnlich ist oder nicht . . . . .	48
10.2.3 Berechnung des Umgebungsgraphen . . . . .	49
10.2.4 Berechnung des Geschlechts aus der Standardzerlegung der Singularitäten . . . . .	49
10.3 Birationale Transformation auf eine Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten . . . . .	50
<b>11 Methoden zur Berechnung des adjungierten Ideals</b>	<b>50</b>
11.1 Berechnung des adjungierten Ideals aus einer Ganzheitsbasis . . . . .	50
11.1.1 Bemerkungen zum Conductor . . . . .	50
11.1.2 Algorithmus zur Berechnung des Conductors . . . . .	53
11.1.3 Anwendung für ebene Kurven . . . . .	54
11.1.4 Herstellung der Beziehung zwischen $\mathfrak{G}$ und $C_{k[C]}^k$ . . . . .	57
11.2 Berechnung des adjungierten Ideals aus der Standardzerlegung der Singularitäten . . . . .	58
11.3 Berechnung des adjungierten Ideals aus der freien Auflösung des Jacobiideals . . . . .	59
11.3.1 Vorbemerkungen . . . . .	59
11.3.2 Die Auflösung des adjungierten Ideals einer ebenen ratio- nalen Kurve . . . . .	64
11.3.3 Spezialfall: Die Auflösung des adjungierten Ideals einer ebenen rationalen Kurve mit nur gewöhnlichen Doppel- punkten . . . . .	66
11.3.4 Berechnung des adjungierten Ideals aus einer freien Auflösung des Jacobiideals . . . . .	69
11.4 Berechnung des adjungierten Ideals mit Saturierung . . . . .	79
<b>12 Praktische Darstellung von birationalen Transformationen</b>	<b>80</b>
<b>13 Berechnung eines <math>g_2^2</math> bzw. eines <math>g_1^1</math> aus dem adjungierten Ideal   einer ebenen rationalen Kurve</b>	<b>83</b>
13.1 Algorithmus zur Bestimmung von glatten Punkten auf $C$ re- präsentiert durch ein Ideal in $K[X, Y, Z]$ . . . . .	83
13.1.1 Subsysteme der adjungierten Linearsysteme von Grad $n -$ $2, n - 1$ . . . . .	83
13.1.2 Berechnung einer Familie von $n - 2$ glatten Punkten und 2 glatten Punkten auf $C$ . . . . .	83
13.2 Für gerades $n$ : Berechnung eines Linearsystems mit Koeffizienten in $K$ , das einen $g_2^2$ ausschneidet . . . . .	84
13.3 Für ungerades $n$ : Berechnung eines Linearsystems mit Koeffizi- enten in $K$ , das einen $g_1^1$ ausschneidet . . . . .	85
13.4 Bemerkung . . . . .	86
<b>14 Berechnung des Geschlechts von <math>C</math> aus dem adjungierten Ideal</b>	<b>86</b>
<b>15 Parametrisierung von Koniken</b>	<b>86</b>

<b>16</b>	<b>Parametrisierung rationaler Normkurven</b>	<b>96</b>
16.1	Allgemeine Definition von Differentialen . . . . .	96
16.2	Aussagen über Morphismen . . . . .	97
16.3	Der Koszulkomplex . . . . .	100
16.3.1	Projektive Auflösungen und Ext . . . . .	100
16.3.2	Anwendung des Koszulkomplexes . . . . .	100
16.4	Die Garbe $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^q(F, G)$ . . . . .	102
16.5	Bestimmung von $\Omega_{X/S}^r$ . . . . .	103
16.6	Anwendung für rationale Normkurven . . . . .	104
<b>17</b>	<b>Suche aller rationalen Punkte auf <math>C</math></b>	<b>108</b>
<b>18</b>	<b>Optimierung der Höhe von Parametrisierungen</b>	<b>109</b>
<b>III Parametrisierungsverfahren für ebene rationale Kurven</b>		<b>109</b>
<b>19</b>	<b>Parametrisierung mit einem <math>g_{n-2}^{n-2}</math> und rationalen Normkurven</b>	<b>110</b>
19.1	Berechnung des adjungierten Ideals . . . . .	110
19.2	Transformation auf eine rationale Normkurve und Bestimmung eines $g_1^1$ . . . . .	110
19.3	Bestimmung einer Parametrisierung aus einer Parametrisierung einer birational äquivalenten rationalen Normkurve . . . . .	111
<b>20</b>	<b>Sukzessive Reduktion des Grads mit einem <math>g_{n-2}^2</math></b>	<b>113</b>
<b>21</b>	<b>Direkte Berechnung eines <math>g_2^2</math> bzw. eines <math>g_1^1</math></b>	<b>114</b>
<b>IV Beispielrechnungen und Vergleich der Parametrisierungsverfahren</b>		<b>114</b>
<b>22</b>	<b>Erzeugung von rationalen Kurven mit vorgegebenen Singularitäten</b>	<b>114</b>
22.1	Vorbemerkungen . . . . .	114
22.2	Beispiele . . . . .	116
<b>23</b>	<b>Beispielkurven</b>	<b>117</b>
<b>24</b>	<b>Berechnung des adjungierten Ideals</b>	<b>120</b>
24.1	Berechnung des adjungierten Ideals mit Saturierung . . . . .	120
24.1.1	Rechenzeiten . . . . .	126
24.2	Berechnung des adjungierten Ideals aus einer Ganzheitsbasis . . . . .	126
24.3	Berechnung des adjungierten Ideals aus der freien Auflösung des Jacobiideals . . . . .	127
<b>25</b>	<b>Parametrisierung rationaler Kurven</b>	<b>128</b>
25.1	Detaillierte Beispielrechnungen . . . . .	128
25.2	Höhe der Parametrisierung . . . . .	147
25.3	Rechenzeiten . . . . .	147

<b>26 Suche eines rationalen Punktes auf einer Konik</b>	<b>148</b>
<b>27 Plots</b>	<b>149</b>
<b>V Skripten</b>	<b>161</b>
<b>28 Berechnung des adjungierten Ideals</b>	<b>161</b>
28.1 Berechnung des adjungierten Ideals mit Saturierung . . . . .	161
28.2 Berechnung des adjungierten Ideals aus einer Ganzheitsbasis . .	163
28.3 Berechnung des adjungierten Ideals aus der freien Auflösung des Jacobiideals . . . . .	166
<b>29 Suche eines rationalen Punktes auf einer Konik</b>	<b>167</b>
<b>30 Parametrisierungsverfahren ausgehend vom adjungierten Ideal</b>	<b>172</b>
30.1 Transformation auf eine rationale Normkurve und Bestimmung eines $g_1^1$ . . . . .	172
30.1.1 Birationale Transformation auf eine rationale Normkurve mit einem $g_{n-2}^{n-2}$ . . . . .	172
30.1.2 Berechnung einer Folge von isomorphen rationalen Norm- kurven und den entsprechenden Isomorphismen . . . . .	173
30.1.3 Berechnung eines $g_2^2$ bzw. eines $g_1^1$ und Berechnung einer Parametrisierung über einer Konik bzw. dem $\mathbb{P}^1$ . . . . .	174
30.1.4 Parametrisierung von Koniken . . . . .	180
30.2 Bestimmung einer Parametrisierung von $C$ aus einer Parametri- sierung einer birational äquivalenten rationalen Normkurve . . .	181
30.2.1 Birationale Transformation auf eine rationale Normkurve mit einem $g_{n-2}^{n-2}$ . . . . .	181
30.2.2 Parametrisierung von rationalen Normkurven . . . . .	181
30.2.3 Berechnung einer Parametrisierung von $C$ aus der Para- metrisierung der birational äquivalenten rationalen Norm- kurve und dem adjungierten Ideal . . . . .	184
30.3 Direkte Berechnung eines $g_2^2$ . . . . .	191
<b>31 Optimierung der Höhe von Parametrisierungen</b>	<b>196</b>

## 1 Einleitung

Eine rationale Kurve ist eine irreduzible projektive Kurve  $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$ , die birational äquivalent ist zu  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Es gibt also einen birationalen Morphismus  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$ . Ein solcher Morphismus heißt Parametrisierung von  $C$ . Eine irreduzible projektive Kurve  $C$  ist rational genau dann, wenn  $p(C) = 0$ . Für eine ebene irreduzible projektive Kurve  $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ist äquivalent:  $C$  ist rational,  $p(C) = 0$ , für alle  $m \in \mathbb{N}$  gibt es birationale Transformationen  $C \rightarrow C_m$  mit rationalen Normkurven  $C_m \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^m$ . (Bemerkung: Im folgenden wird darauf verzichtet eine birationale Transformation von  $A$  nach  $B$  mit einem gestrichelten Pfeil zu bezeichnen. Statt dessen wird  $A \rightarrow B$  geschrieben, auch wenn die birationale Transformation nicht auf ganz  $A$  definiert ist, es wird jedoch stets darauf hingewiesen, daß es sich

um eine solche handelt. Das Rechnen mit birationalen Transformationen ist in Abschnitt 12 behandelt).

Sei eine ebene rationale Kurve  $C$  gegeben durch einen birationalen Morphismus  $(\Phi_0 : \Phi_1 : \Phi_2) : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$  mit homogenen Polynomen  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{Q}[T_0, T_1]$  vom gleichen Grad und ohne gemeinsamen Teiler. Setzt man  $\alpha : \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2] \rightarrow \mathbb{Q}[T_0, T_1]$ ,  $\alpha(X_i) := \Phi_i$ , gilt  $\ker(\alpha) = \langle F \rangle$  mit einem irreduziblen  $F \in \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$  und  $C = V(F)$ .

Ist umgekehrt eine ebene rationale Kurve  $C = V(F)$  vom Grad  $n$  mit einem homogenen Polynom  $F \in \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$  vom Grad  $n$  gegeben, dann kann man fragen, ob es eine Parametrisierung  $(\Phi_0 : \Phi_1 : \Phi_2)$  mit homogenen Polynomen  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{Q}[T_0, T_1]$  vom gleichen Grad gibt, und ob man eine derartige Parametrisierung mit einem Algorithmus finden kann. Eine solche Parametrisierung heißt rationale Parametrisierung. Die Antwort wurde von Hilbert und Hurwitz in der Arbeit "Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null" (1889) [20] gegeben. Falls  $n$  ungerade ist, ist es stets möglich eine rationale Parametrisierung zu finden. Ist  $n$  gerade, dann gibt es einen birationalen Morphismus  $C_2 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  und einer Konik  $C_2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  mit Gleichung in  $\mathbb{Q}[Y_0, Y_1, Y_2]$ . Die Formulierung, daß die birationale Transformation  $C_2 \rightarrow C$  Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  hat, bedeutet, daß sie repräsentiert werden kann durch  $(\Phi_0 : \Phi_1 : \Phi_2)$  mit  $\Phi_i$  aus dem homogenen Koordinatenring von  $C_2$ , wobei  $\Phi_i$  durch einen Repräsentanten in  $\mathbb{Q}[Y_0, Y_1, Y_2]$  gegeben ist und diese Repräsentanten alle den gleichen Grad haben. Eine rationale Parametrisierung von  $C$  existiert genau dann, wenn eine solche für  $C_2$  existiert. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn es einen rationalen Punkt auf  $C_2$  gibt. Anderenfalls existiert eine Parametrisierung von  $C$  mit Koeffizienten in einer algebraischen Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}$  vom Grad 2. Ein Algorithmus, um einen rationalen Punkt auf einer Konik zu finden, falls einer existiert, wird in Abschnitt 15 behandelt. Er ist in Abschnitt 29 in Maple implementiert. In der Arbeit von Hilbert und Hurwitz wird ein Algorithmus angegeben, der eine Parametrisierung von  $C$  liefert, die Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  hat oder in einer algebraischen Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}$  vom Grad 2, falls dies nicht anders möglich ist. Die wesentliche Vorarbeit wurde von M. Noether in der Arbeit "Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen" (1883) [32] geleistet, wo ein Algorithmus angegeben wurde, der für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$  eine Basis mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  des Grad  $m$ -Teils des adjungierten Ideals von  $C$  berechnet.

Es gibt heute im wesentlichen 4 Ansätze für Algorithmen zur Berechnung einer rationalen Parametrisierung von  $C$ :

1. Der Algorithmus von Hilbert und Hurwitz (1889) [20]:

Dieses Verfahren ist beschrieben in Abschnitt 20.

Eine Basis des Grad  $(n-2)$ -Teils des adjungierten Ideals von  $C$  liefert eine birationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow C_{n-2}$ , wobei  $C_{n-2} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-2}$  eine rationale Normkurve bezeichnet.  $C_{n-2}$  kann man mit einem birationalen Morphismus  $\pi : C_{n-2} \rightarrow D_{n-2} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  auf eine rationale ebene Kurve vom Grad  $n-2$  projizieren, deren Gleichung Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  hat. Der Algorithmus berechnet aus einer Basis des Grad  $(n-2)$ -Teils des adjungierten Ideals von  $C$  die Komposition  $\pi \circ \Phi$ . Führt man dies iterativ weiter bekommt man eine birationale Transformation  $C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , falls  $n$  ungerade war, und eine birationale Transformation  $C \rightarrow C_2$  auf eine Konik  $C_2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , falls

$n$  gerade war. Diese läßt sich umkehren und man erhält einen birationalen Morphismus  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$  bzw.  $C_2 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ .

2. Das folgende Verfahren wird in Abschnitt 19.2 angegeben und in Abschnitt 30.1 in dem Computeralgebra-Programm Macaulay 2 implementiert:

Mit dem adjungierten Ideal hat man wieder eine birationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow C_{n-2}$  mit einer rationalen Normkurve  $C_{n-2} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-2}$ . Kanonische Divisoren auf  $C_{n-2}$  sind von der Form  $-P_1 - P_2$  mit 2 Punkten  $P_1, P_2$  auf  $C_{n-2}$ . Wir betrachten zwei solche Punkte, die, wenn man die (quadratischen) Erzeuger von  $I(C_{n-2})$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  hat, repräsentiert werden durch  $n - 3$  zusätzliche lineare Gleichungen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ , die das Linearsystem der Hyperebenen im  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-2}$  durch diese Punkte bilden. Dieses schneidet eine vollständige Linearschar vom Grad  $n - 4$  und Dimension  $n - 4$  aus, und man erhält eine birationale Transformation  $C_{n-2} \rightarrow C_{n-4}$  auf eine rationale Normkurve  $C_{n-4} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-4}$  und Erzeuger von  $I(C_{n-4})$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ . Die Berechnung von  $C_{n-2} \rightarrow C_{n-4}$  wird in Abschnitt 16 behandelt. Iterativ bekommt man also eine birationale Transformation  $C \rightarrow C_{n-2} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , falls  $n$  ungerade war, bzw. eine birationale Transformation  $C \rightarrow C_{n-2} \rightarrow C_2$  auf eine Konik  $C_2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , falls  $n$  gerade war. Die Umkehrung dieser birationalen Transformation gemäß Abschnitt 12 liefert einen birationalen Morphismus  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$  bzw.  $C_2 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ .

Folgende Modifikation dieser Methode ist in Abschnitt 19.3 beschrieben und in Abschnitt 30.2 implementiert:

Statt die birationale Transformation  $C \rightarrow C_{n-2} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  bzw.  $C \rightarrow C_{n-2} \rightarrow C_2$  umzukehren, berechnet man eine rationale Parametrisierung der rationalen Normkurve  $C_{n-2}$  über dem  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  bzw. einer Konik  $C_2$ . Ein Algorithmus dazu ist in Abschnitt 16.6 angegeben. Schließlich kehrt man noch  $C \rightarrow C_{n-2}$  um (Abschnitt 19.3) und erhält damit einen birationalen Morphismus  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$  bzw.  $C_2 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ . Beide Teilschritte sind besonders einfach, da außer in Spezialfällen nur bilineare Gleichungen aus dem Ideal des Graphen der jeweiligen birationalen Transformation betrachtet werden müssen. Zur Umkehrung von  $C \rightarrow C_{n-2}$  verwendet man die Hilbert-Burch-Matrix des adjungierten Ideals.

3. Der Algorithmus von Sendra und Winkler (1997) [39]:

Aus dem adjungierten Ideal werden Familien von jeweils 2 glatten Punkten auf  $C$  berechnet. Unter einer solchen Familie versteht man ein Radikalideal  $I \subset \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$ , sodaß  $V(I)$  aus 2 verschiedenen glatten Punkten von  $C$  besteht (diese Punkte müssen nicht notwendig rationale Punkte von  $C$  sein). Legt man  $\frac{n-4}{2}$  für  $n$  gerade bzw.  $\frac{n-3}{2}$  für  $n$  ungerade solcher Paare von Punkten als Basispunkte des Linearsystems der Adjungierten vom Grad  $n - 2$  fest, erhält man eine birationale Transformation  $C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  bzw.  $C \rightarrow C_2$ . Die Umkehrung dieser birationalen Transformation liefert einen birationalen Morphismus  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$  bzw.  $C_2 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ .

Dieses Verfahren ist in dem *Maple*-Paket CASA des RISC-Linz implementiert.

Eine in der Technik und Vorgehensweise modifizierte Version ist in Abschnitt 13 angegeben und in Abschnitt 30.3 programmiert. Dabei wird

unabhängig davon, ob  $n$  gerade oder ungerade ist, stets eine birationale Transformation  $C \rightarrow C_2$  auf eine Konik erzeugt und diese dann umgekehrt.

4. Der Algorithmus von Mark van Hoeij (1997) [23]:

Dieser Algorithmus konstruiert zunächst den ganzen Abschluß  $\overline{\mathbb{C}[C']}$  von  $\mathbb{C}[C']$  in  $\mathbb{C}(C')$  für eine geeignete zu  $C$  birational äquivalente affine Kurve  $C'$ , indem eine Ganzheitsbasis  $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}(C')$  angegeben wird mit  $\overline{\mathbb{C}[x]}^{\mathbb{C}(C')} = \mathbb{C}[x]b_0 + \dots + \mathbb{C}[x]b_{n-1}$ , wobei man erreichen kann, daß  $b_0, \dots, b_{n-1}$  Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  haben. Daraus wird direkt ein  $g_2^2$  und damit eine birationale Transformation  $C \rightarrow C_2$  berechnet, unabhängig ob  $n$  gerade oder ungerade ist, und dann diese umgekehrt. Dieses Verfahren ist in einem Maple-Paket implementiert.

Das adjungierte Ideal spielt also eine zentrale Rolle in Algorithmen, die eine rationale Parametrisierung suchen. Es hat verschiedene Ansätze gegeben, um zu definieren, was ein adjungiertes Ideal einer irreduziblen ebenen Kurve ist. In der Arbeit [8] ist eine Definition gegeben, die diese Ansätze zusammenfaßt. Im wesentlichen gibt es 3 wichtige adjungierte Ideale: das klassische im folgenden mit  $\mathfrak{N}$  bezeichnet, das von Gorenstein, bezeichnet mit  $\mathfrak{G}$ , und das von Keller bezeichnet mit  $\mathfrak{K}$ . Tatsächlich gilt  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{K} = \mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{N} = \mathfrak{K} = \mathfrak{G}$  falls  $C$  nur gewöhnliche Mehrfachpunkte hat. Heute wird  $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$  als das adjungierte Ideal bezeichnet und dieses gibt dann auch die birationale Transformation  $C \rightarrow C_{n-2}$ . Diese Thematik wird in dem Abschnitt 6 behandelt. Alle drei Ansätze bieten die Möglichkeit, das entsprechende adjungierte Ideal mit einem Algorithmus zu berechnen. Es werden folgende Verfahren zur Berechnung von Erzeugern von  $\mathfrak{G}$  bzw.  $\mathfrak{N}$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  behandelt:

1. In Abschnitt 11.1 wird ein Verfahren angegeben, das für eine beliebige ebene irreduzible Kurve aus einer Ganzheitsbasis von  $\overline{\mathbb{C}[C']}$  über  $\mathbb{C}[C']$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ , wobei  $C'$  eine geeignete zu  $C$  birational äquivalente affine Kurve ist, das adjungierte Ideal  $\mathfrak{G}$  berechnet.
2. In Abschnitt 11.2 wird das klassische Verfahren von M. Noether aus [32] behandelt, das für eine ebene irreduzible Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten das adjungierte Ideal  $\mathfrak{N}$  berechnet. Dieser Algorithmus wurde in [38] weiterentwickelt. Im Abschnitt 10.3 ist ein Verfahren angegeben, das mittels ebener quadratischer Transformationen (Abschnitt 8) eine beliebige ebene irreduzible Kurve mit Gleichung in  $\mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$  auf eine Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten und Gleichung in  $\mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$  transformiert.
3. In Abschnitt 11.4 wird ein Verfahren besprochen, das  $\mathfrak{N}$  für eine ebene irreduzible Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten mittels Saturierung (Abschnitt 7) berechnet. Bemerkung: Das Verfahren läßt sich erweitern, um auch für Kurven mit nicht-gewöhnlichen Mehrfachpunkten ohne wesentlichen Mehraufwand in den meisten Fällen  $\mathfrak{G}$  zu berechnen.
4. In Abschnitt 11.3 wird für eine ebene projektive rationale Kurve  $C = V(f)$ ,  $f \in R := \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$  irreduzibel,  $n := \deg(f)$ , mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten gezeigt, daß die freie Auflösung von  $J := \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \right\rangle$

die Form

$$0 \rightarrow R^{n-1} \xrightarrow{h_2} R^{n+1} \xrightarrow{h_1} R^3 \rightarrow J \rightarrow 0$$

hat. Daraus ergeben sich 2 Methoden, um das adjungierte Ideal von  $C$  zu berechnen:

- (a) Der Grad  $n - 2$  Teil von  $\ker(h_2 \otimes R/J_f)$  wird erzeugt von Vektoren  $\begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_{n-1} \end{pmatrix}$ , wobei  $\bar{w}_i$  das Bild von  $w_i \in R$  in  $R/J_f$  sei und  $\deg(w_i) = n - 2$ . Es gilt  ${}_{\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]} \langle w_1, \dots, w_{n-1} \rangle = \mathfrak{N} = \mathfrak{K} = \mathfrak{G}$ .
- (b) Jede minimale freie Auflösung des adjungierten Ideals  $\mathfrak{G}$  einer ebenen rationalen Kurve vom Grad  $n$  hat die Form

$$0 \rightarrow S(-(n-1))^{n-2} \xrightarrow{d_1} S(-(n-2))^{n-1} \xrightarrow{d_0} \mathfrak{G} \rightarrow 0$$

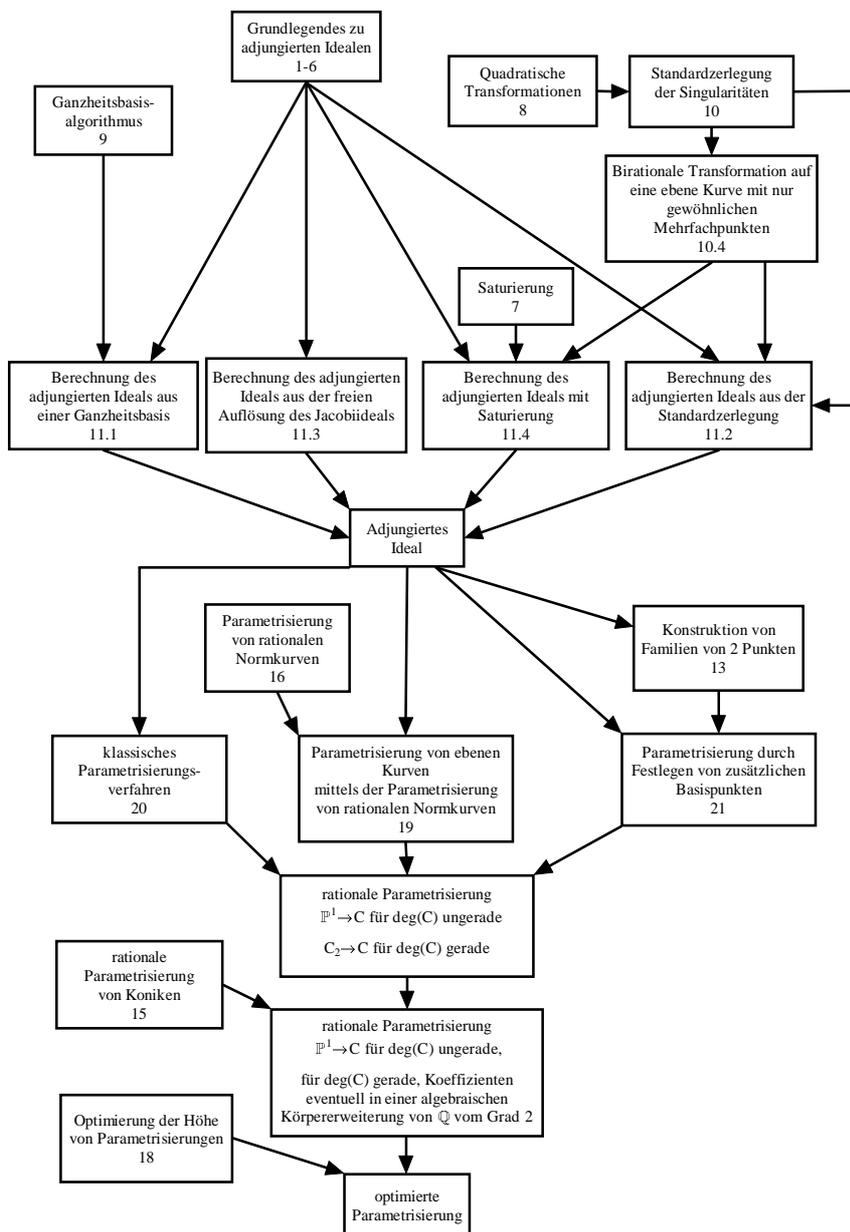
mit  $S := \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ . Das Ideal der  $(n-2) \times (n-2)$ -Minoren von  $d_1$  ist das adjungierte Ideal von  $C$ . Sei (für die Kurve mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten)  $\bar{h}_1 := h_1 \otimes R/J_f$ ,  $M$  der  $R/J_f$ -Modul erzeugt von den Spalten von  $\bar{h}_1$  und sei  $\tilde{h}_1$  die Matrix, in deren Spalten minimale Erzeuger des Moduls  $M$  stehen. Sei  $\tilde{h}_2$  die lineare Syzygienmatrix von  $\tilde{h}_1$ . Sei  $\tilde{d}_1 \in R_{n-2, n-1}$  die Matrix der linearen Repräsentanten der Einträge von  $\tilde{h}_2^T$ . Das Ideal in  $S$  erzeugt von den  $(n-2) \times (n-2)$ -Minoren von  $\tilde{d}_1$  ist dann  $\mathfrak{G}$ .

Man beachte, daß man, um die vom adjungierten Ideal induzierte birationale Transformation  $C \rightarrow C_{n-2}$  auf eine rationale Normkurve  $C_{n-2} \subset \mathbb{P}_k^{n-2}$  umzukehren, die Hilbert-Burch Matrix  $\tilde{d}_1$  von  $\mathfrak{G}$  direkt verwenden kann.

Neben den Rechenzeiten zur Bestimmung einer rationalen Parametrisierung (Vergleich der Rechenzeiten in Abschnitt 25.3) ist für die praktische Verwendbarkeit einer Parametrisierung, z.B. im Computer Aided Design, auch die Größe der Koeffizienten der Parametrisierung wichtig. Diese wird durch den betragsmäßig größten Koeffizienten gemessen, dessen Betrag als Höhe bezeichnet wird. In Abschnitt 18 ist ein Verfahren angegeben, das oft die Höhe einer Parametrisierung verbessern kann. Ein Vergleich der von den verschiedenen Parametrisierungsverfahren gelieferten Höhen findet sich in Abschnitt 25.2. Beispielplots sind in Abschnitt 27 gegeben und ausführliche Zwischenergebnisse der Parametrisierungsverfahren in Abschnitt 25.1.

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Herrn Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer bedanken, der mich in meinem Studium unterstützt, in das Thema eingeführt, die Arbeit betreut und mir in außergewöhnlicher Weise seine Zeit zur Verfügung gestellt hat. Ihm verdanke ich wesentliche Denkanstöße, Anregungen und Ideen. Mein Dank gilt weiterhin Hans-Christian von Bothmer, der mir viele Problemstellungen erklärt und Verbesserungsvorschläge gemacht hat, auch Thomas Eckl, sowie Thomas Bauer, der einen Teil der Arbeit Korrektur gelesen hat.

Im folgenden Diagramm soll der logische Zusammenhang der einzelnen Abschnitte verdeutlicht werden (es ist jeweils deren Nummer und ein Stichwort zum Inhalt angegeben):



# Teil I

## Vorbemerkungen

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen.

## 2 Nichtsinguläre Kurven

### 2.1 Lokale Ringe

Sei  $C$  eine irreduzible, nichtsinguläre, vollständige algebraische Kurve.  $k(C)$  ist ein algebraischer Funktionenkörper in 1 Variable über  $k$ .  $C$  sei mit der Zariskitopologie versehen. Der lokale Ring von  $C$  in einem Punkt  $P$  sei  $\mathcal{O}_{C,P}$ .  $\mathcal{O}_{C,P}$  ist ein Unterring von  $k(C)$  und ein noetherscher lokaler Ring mit einem eindeutigen maximalen Ideal  $m_{C,P}$ .  $\mathcal{O}_{C,P}$  ist ein regulärer lokaler Ring,  $m_{C,P}$  ein Hauptideal. Sei  $t$  ein Erzeuger von  $m_{C,P}$ .  $t$  heißt uniformisierender Parameter in  $P$ .  $\mathcal{O}_{C,P}$  ist ein diskreter Bewertungsring. Bezeichne die entsprechende Bewertung mit  $v_P : k(C) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ . Ist  $v_P(f) = j$  und  $t$  ein uniformisierender Parameter in  $P$ , dann gibt es ein  $u \in \mathcal{O}_{C,P}^*$  mit  $f = t^j u$ .  $k(C)$  hat außer den  $\mathcal{O}_{C,P}$ ,  $P \in C$  keine weiteren diskreten Bewertungsringe.

### 2.2 Divisoren

Ein Element der freien abelschen Gruppe  $Div(C)$  der Punkte von  $C$  heiße **Divisor** auf  $C$  (ein solcher Divisor ist also ein Weildivisor auf  $C$ ). Ist  $D$  ein Divisor auf  $C$ , dann gibt es  $n_P \in \mathbb{Z}$  mit  $D = \sum_{P \in C} n_P P$  und  $n_P = 0$  für alle bis auf endlich viele  $P \in C$ . Setze  $v_P(D) := n_P$ .  $\deg(D) := \sum_{P \in C} v_P(D)$  heißt **Grad des Divisors**  $D$ . Ein Divisor  $D$  heißt **effektiv** genau dann, wenn  $v_P(D) \geq 0 \forall P \in C$ . Schreibe dann  $D \geq 0$ . Ist  $D - D' \geq 0$  schreibe  $D \geq D'$ . Ist  $f \in k(C)$ , dann setze  $(f) := \sum_{P \in C} v_P(f) P$ .  $P(C) := \{(f) \mid f \in k(C)\}$  ist eine Untergruppe von  $Div(C)$ .  $Div(C)/P(C)$  heißt Divisorenklassengruppe von  $C$ . Die Äquivalenzklassen seien mit  $\{D\}$  bezeichnet. Sind  $D, D' \in \{D\}$  dann heißen  $D$  und  $D'$  linearäquivalent, d.h.  $\exists f \in k(C)$  mit  $D = D' + (f)$ . Ist  $D \in P(C)$ , dann ist  $\deg(D) = 0$ . Damit ist der Grad einer Divisorenklasse  $\{D\}$  wohldefiniert als  $\deg(\{D\}) := \deg(D)$ .

Sei  $D$  ein Divisor. Sei  $D' \geq 0$  linearäquivalent zu  $D$ , d.h.  $\exists f \in k(C)$  mit  $D' = D + (f)$ , also  $D + (f) \geq 0$ , also  $(f) \geq -D$ . Sei  $L(D) := \{f \in k(C) \mid (f) \geq -D\} \cup \{0\}$ .  $L(D)$  ist ein Vektorraum. Ist  $f \in L(D) \setminus \{0\}$ , dann ist  $D' := D + (f) \geq 0$  und für  $f, g \in L(D) \setminus \{0\}$  gilt  $D + (f) = D + (g)$  genau dann, wenn  $\exists \lambda \in k \setminus \{0\}$  mit  $f = \lambda g$ . Sei  $|D| := \{D' \geq 0 \mid D' \in \{D\}\}$ . Damit hat man eine bijektive Korrespondenz von  $\mathbb{P}(L(D))$  mit  $|D|$ . Eine effektive **Linearschar**  $\mathcal{A}$  ist eine Menge von effektiven Divisoren, die zu einem linearen projektiven Unterraum von  $\mathbb{P}(L(D))$  für ein  $D \in Div(C)$  korrespondiert. Dieser Unterraum korrespondiert zu einem Untervektorraum  $A$  von  $L(D)$ . Setze  $\dim(\mathcal{A}) := \dim(A) - 1$ . Setze  $l(D) := \dim(L(D)) = \dim(|D|) + 1$ .  $|D|$  heißt **vollständige** Linearschar. Effektive Linearscharen korrespondieren zu Morphismen von  $C$  in einen projektiven Raum. Sei  $\mathcal{A}$  eine effektive Linearschar. Man sagt  $\mathcal{A}$  hat keine Basispunkte genau dann, wenn  $\forall P \in C \exists D \in \mathcal{A}$  mit  $v_P(D) = 0$ .

### 2.3 Satz von Riemann-Roch

Sei  $\mathcal{L}(D)_P = \{f \in k(C) \mid v_P(f) \geq -v_P(D)\}$  der Halm der Garbe  $\mathcal{L}(D)$  in  $P$ , die eine Untergarbe von der konstanten Garbe  $k(C)$  ist. Es gilt  $H^0(C, \mathcal{L}(D)) = L(D)$  ist endlichdimensional, ebenso  $H^1(C, \mathcal{L}(D))$  und  $H^q(C, \mathcal{L}(D)) = 0$  für  $q \geq 2$ . Ist  $D' := D + (f)$  mit  $f \in k(C)$ , dann ist  $\mathcal{L}(D)$  isomorph zu  $\mathcal{L}(D')$ .

Sei  $I(D) := H^1(C, \mathcal{L}(D))$ , sei  $i(D) := \dim I(D)$ .  $p(C) := \dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = i(0)$  heißt Geschlecht von  $C$ . Es gilt

$$l(D) - i(D) = \deg(D) - p(C) + 1 \text{ bzw.} \\ \dim(|D|) = l(D) - 1 = \deg(D) - p(C) + i(D)$$

Sei  $F$  eine kommutative Algebra über einem Körper  $k$ . Der Modul der  $k$ -Differenziale von  $F$  sei mit  $D_k(F)$  bezeichnet.  $D_k(F)$  ist ein  $F$ -Modul zusammen mit einer  $k$ -linearen Abbildung  $d : F \rightarrow D_k(F)$  mit  $d(xy) = xdy + ydx$ .  $D_k(F)$  wird von den  $dx$  mit  $x \in F$  erzeugt. Für eine Varietät  $X$  ist  $\underline{\Omega}_P = D_k(\mathcal{O}_{X,P})$  der Halm der kohärenten Garbe  $\underline{\Omega}$  auf  $X$ .  $\underline{\Omega}$  ist lokal frei über der (offenen) Menge der nichtsingulären Punkte von  $X$ . Betrachte nun die Kurve  $C$ :

$\underline{\Omega}$  ist eine Untergarbe der konstanten Garbe  $D_k(k(C))$ . Ist  $t$  ein uniformisierender Parameter in  $P$ , dann ist  $dt$  eine Basis des  $\mathcal{O}_{C,P}$ -Moduls  $\underline{\Omega}_P$  und eine Basis des  $k(C)$ -Vektorraums  $D_k(k(C))$ . Damit kann man ein  $\varpi \in D_k(k(C))$  schreiben als  $\varpi = fdt$  mit einem  $f \in k(C)$ . Ist  $f \neq 0$ , setze  $v_P(\varpi) := v_P(f)$ .

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von  $t$ . Sei  $\widehat{k(C)}_P$  die Vervollständigung von  $k(C)$  in bezug auf die Bewertung  $v_P$ , also  $\widehat{k(C)}_P \simeq k((T))$  mit  $t \mapsto T$ . Identifiziere  $f$  mit seinem Bild in  $k((T))$ . Dann kann man schreiben  $f = \sum_{n \geq N} a_n T^n$  mit  $a_n \in k$  und einem  $N \in \mathbb{Z}$ . Definiere das Residuum von  $\varpi = fdt$  in  $P$  als  $res_P(\varpi) := a_{-1}$  mit  $f = \sum_{n \geq N} a_n T^n$ .  $res_P(\varpi)$  ist unabhängig von der Wahl von  $t$ . Es gilt für jedes  $\varpi \in D_k(k(C))$ , daß  $\sum_{P \in C} res_P(\varpi) = 0$ .

Für ein  $\varpi \in D_k(k(C))$ ,  $\varpi \neq 0$  setze  $(\varpi) := \sum_{P \in C} v_P(\varpi) P$ . Hat man einen Divisor  $D$  gegeben, dann sei  $\Omega(D) := \{\varpi \in D_k(k(C)) \setminus \{0\} \mid (\varpi) \geq D\} \cup \{0\}$ .  $\Omega(D)$  ist ein Untervektorraum von  $D_k(k(C))$ . Es gilt  $i(D) = \dim \Omega(D)$  (Dualität), insbesondere ist

$$p(C) = i(0) = \dim(\Omega(0)) = \dim\{\varpi \in D_k(k(C)) \mid (\varpi) \geq 0\}$$

Seien  $\varpi, \varpi' \in D_k(k(C))$ ,  $\varpi, \varpi' \neq 0$ . Da  $\dim D_k(k(C)) = 1$  als  $k(C)$ -Vektorraum, gibt es ein  $f \in k(C)^*$  mit  $\varpi' = f\varpi$ . Also gilt  $(\varpi') = (f) + (\varpi)$ , also ist  $\mathcal{K} := \{(\varpi) \mid \varpi \in D_k(k(C))\}$  eine lineare Äquivalenzklasse von Divisoren.  $\mathcal{K}$  heißt **kanonische Klasse von  $C$** . Die Elemente heißen **kanonische Divisoren von  $C$** . Sei  $K = (\varpi_0)$ ,  $\varpi_0 \in D_k(k(C))$  ein kanonischer Divisor von  $C$  und sei  $\varpi \in D_k(k(C))$ . Dann gibt es ein  $f \in k(C)^*$  mit  $\varpi = f\varpi_0$ . Also ist  $(\varpi) \geq D$  genau dann, wenn  $(f) + (\varpi_0) \geq D$  genau dann, wenn  $f \in L(K - D)$ . Also ist

$$i(D) = \dim(\Omega(D)) = l(K - D)$$

Also gilt für jeden  $D \in Div(C)$ , daß

$$\dim(|D|) = l(D) - 1 = \deg(D) - p(C) + l(K - D)$$

Insbesondere hat man, da  $l(0) = i(K) = 1$  und  $l(K) = i(0) = p(C)$ , daß

$$\deg(K) = 2p(C) - 2 \\ \dim(|K|) = p(C) - 1$$

Ist  $\deg(D) \geq 2p(C) - 1$ , dann gilt  $\deg(K - D) \leq -1$  also  $l(K - D) = 0$   
also  $\dim(|D|) = \deg(D) - p(C)$ .

Ist  $\deg(D) \geq 2p(C)$ , dann hat  $|D|$  keine Basispunkte.

Ist  $\deg(D) \geq 2p(C) + 1$ , dann ist  $|D|$  very ample.

### 3 Blowups von Quasiprojektiven Varietäten

#### 3.1 Der $\sigma$ -Prozess im $\mathbb{P}_k^n$

1. Sei  $\Pi := \{(x_0 : \dots : x_n, y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1} \mid x_i y_j = y_i x_j, 1 \leq i, j \leq n\}$ .
2. Betrachte die Abbildung

$$\sigma_0 : \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_k^n, (x_0 : \dots : x_n, y_1 : \dots : y_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$$

Sei  $\varepsilon := (1 : 0 : \dots : 0)$ . Sei  $(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_k^n$ ,  $(x_0 : \dots : x_n) \neq \varepsilon$  und  $(x_0 : \dots : x_n, y_1 : \dots : y_n) \in \Pi$ . Dann ist  $(x_1 : \dots : x_n) = (y_1 : \dots : y_n)$ , denn  $x_i y_j = y_i x_j, 1 \leq i, j \leq n$ . Dagegen gilt  $\sigma_0^{-1}(\varepsilon) = \varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ . Somit ist

$$\sigma_0 \mid_{\Pi \setminus (\varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1})} : \Pi \setminus (\varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1}) \rightarrow \mathbb{P}_k^n \setminus \{\varepsilon\}, (x_0 : \dots : x_n, y_1 : \dots : y_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$$

ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus

$$\left(\sigma_0 \mid_{\Pi \setminus (\varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1})}\right)^{-1} : \mathbb{P}_k^n \setminus \{\varepsilon\} \rightarrow \Pi \setminus (\varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1}), (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n, x_1 : \dots : x_n)$$

Die birationale Transformation  $\sigma := \left[\sigma_0 \mid_{\Pi \setminus (\varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1})}\right]$  heißt  **$\sigma$ -Prozess mit Zentrum**  $(1 : 0 : \dots : 0)$ .

3. Sei  $U_i := \{(x_0 : \dots : x_n, y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1} \mid x_0 \neq 0, y_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$  offen, also  $\Pi \cap U_i$  offen in  $\Pi$  und damit ist  $\Pi \cap U_i$  eine quasiprojektive Varietät. Weiter gilt

$$\Pi \cap U_i = \left\{ (x_0 : \dots : x_n, y_1 : \dots : y_n) \in U_i \mid x_j = \frac{y_j}{y_i} x_i, 1 \leq j \leq n, j \neq i \right\}$$

und damit ist  $\Pi \cap U_i$  isomorph zu  $\mathbb{A}_k^n$  mittels

$$\begin{aligned} \Pi \cap U_i &\rightarrow \mathbb{A}_k^n \\ (x_0 : \dots : x_n, y_1 : \dots : y_n) &\mapsto \left( \frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{x_i}{x_0}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i} \right) \\ \mathbb{A}_k^n &\rightarrow \Pi \cap U_i \\ (z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) &\mapsto (1 : z_1 z_0 : \dots : z_{i-1} z_0 : z_0 : z_{i+1} z_0 : \\ &\quad : \dots : z_n z_0, z_1 : \dots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \dots : z_n) \end{aligned}$$

$\Pi$  ist nichtsingulär und irreduzibel.

### 3.2 Der lokale $\sigma$ -Prozess

1. Sei  $U$  eine irreduzible nichtsinguläre quasiprojektive Varietät, sei  $P \in U$  und sei vorausgesetzt, daß es  $u_1, \dots, u_n \in \Gamma[U]$  gibt mit

$\{Q \in U \mid u_1(Q) = 0, \dots, u_n(Q) = 0\} = \{P\}$ , die ein lokales Koordinatensystem bilden. Sei

$$Y := \{(Q, y_1 : \dots : y_n) \in U \times \mathbb{P}_k^{n-1} \mid u_i(Q) y_j = u_j(Q) y_i \ \forall i, j = 1, \dots, n\}$$

Die Projektion  $\sigma_0 : U \times \mathbb{P}_k^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_k^{n-1}$  ist ein Morphismus.  $\sigma := \sigma_0|_Y : Y \rightarrow \mathbb{P}_k^{n-1}$  ist ebenfalls ein Morphismus und heißt **lokaler  $\sigma$ -Prozess von  $U$  in  $P$** .

Sei  $Q \in U$ ,  $Q \neq P$ . Dann besteht  $\sigma^{-1}(Q)$  aus genau einem Punkt, denn  $\exists i \in \{1, \dots, n\} : u_i(Q) \neq 0$  und damit gilt für einen Punkt  $(Q, y_1 : \dots : y_n) \in \sigma^{-1}(Q)$ , daß  $y_j = \frac{u_j(Q)}{u_i(Q)} y_i \ \forall j = 1, \dots, n$ , d.h.  $\sigma^{-1}(Q) = \{(Q, u_1(Q) : \dots : u_n(Q))\}$ . Außerdem gilt  $\sigma^{-1}(P) = P \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ . Somit ist

$$\sigma|_{Y \setminus (P \times \mathbb{P}_k^{n-1})} : Y \setminus (P \times \mathbb{P}_k^{n-1}) \rightarrow U \setminus \{P\}, (Q, y_1 : \dots : y_n) \mapsto Q$$

ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus

$$\left(\sigma|_{Y \setminus (P \times \mathbb{P}_k^{n-1})}\right)^{-1} : U \setminus \{P\} \rightarrow Y \setminus (P \times \mathbb{P}_k^{n-1}), Q \mapsto (Q, u_1(Q) : \dots : u_n(Q))$$

Deshalb gilt  $\dim(\sigma^{-1}(U \setminus \{P\})) = n$ .

Setze  $Y_i := \{(Q, y_1 : \dots : y_n) \in Y \mid y_i \neq 0\}$ , also  $Y = \bigcup_{i=1, \dots, n} Y_i$  und damit ist  $Y_1, \dots, Y_n$  eine offene Überdeckung von  $Y$ . Auf  $Y_i$  haben wir lokale Koordinaten  $Q(i)_j := \frac{y_j}{y_i} = \frac{u_j \circ \sigma}{u_i \circ \sigma}$  für  $j = 1, \dots, n$  mit  $j \neq i$  und  $Q(i)_i := u_i \circ \sigma$ . Deshalb gilt für  $S \in \sigma^{-1}(P)$ , daß  $\dim(\Theta_{S,Y}) = n = \dim(Y)$  und damit ist  $Y$  nichtsingulär. In diesen lokalen Koordinaten ist  $\sigma$  gegeben durch

$$(u_1, \dots, u_2)(\sigma(S)) = (Q(i)_i(S) Q(i)_1(S), \dots, Q(i)_i(S), \dots, Q(i)_i(S) Q(i)_n(S))$$

für  $S \in Y_i$ .

Insbesondere gilt für  $n = 2$  und  $i = 1$  und  $S \in Y_i$ , daß  $(u_1, u_2)(\sigma(S)) = (Q(1)_1(S), Q(1)_1(S) \cdot Q(1)_2(S))$ .

2. Der lokale  $\sigma$ -Prozess ist unabhängig von der Wahl des lokalen Koordinatensystems.

Beweis: [40], Ch. II, §4.2.

### 3.3 Iteration von $\sigma$ -Prozessen

Sei  $X$  eine irreduzible quasiprojektive Varietät. Man kann annehmen, daß  $X \subset V \subset \mathbb{P}_k^n$  mit einer projektiven Varietät  $V$ . Außerdem kann man annehmen, daß  $\varepsilon := (1 : 0 : \dots : 0) \in X$ . Betrachte nun den  $\sigma$ -Prozess in  $\mathbb{P}_k^n$  zentriert in  $\varepsilon$  aus 3.1:  $\sigma : \Pi \rightarrow \mathbb{P}_k^n$ .  $\sigma^{-1}(X)$  ist eine quasiprojektive Varietät, denn  $\sigma^{-1}(X) \subset \Pi \subset \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1}$ ,  $\sigma^{-1}(X)$  ist offen in  $\Pi$ .

Wenn  $X$  nichtsingulär in  $\varepsilon$  ist und  $X \not\subseteq \mathbb{P}_k^n$ , dann gilt  $\sigma^{-1}(X) = (\varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1}) \cup Y$ , wobei  $Y := \overline{\sigma^{-1}(X \setminus \{\varepsilon\})}$ . Da  $\sigma|_{\Pi \setminus (\varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1})}: \Pi \setminus (\varepsilon \times \mathbb{P}_k^{n-1}) \rightarrow \mathbb{P}_k^n \setminus \{\varepsilon\}$  ein Isomorphismus ist, ist  $\sigma|_{\sigma^{-1}(X \setminus \{\varepsilon\})}: \sigma^{-1}(X \setminus \{\varepsilon\}) \rightarrow X \setminus \{\varepsilon\}$  ein Isomorphismus.  $Y$  ist als irreduzible abgeschlossene Teilmenge einer quasiprojektiven Varietät eine quasiprojektive Varietät.

Für  $x \in X$ ,  $x \neq \varepsilon$  und eine offene Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  mit  $\varepsilon \notin U$  ist  $\sigma|_{\sigma^{-1}(U)}: \sigma^{-1}(U) \rightarrow U$  ein Isomorphismus. Insbesondere ist  $\sigma^{-1}(x)$  ein einfacher Punkt. Für eine affine Umgebung  $U \subset X$  von  $\varepsilon$  ist  $\sigma|_{\sigma^{-1}(U)}: \sigma^{-1}(U) \rightarrow U$  der lokale  $\sigma$ -Prozess. Aus 3.2 folgt, daß alle Punkte von  $\sigma^{-1}(\varepsilon) \cap Y$  einfache Punkte von  $Y$  sind. Wenn  $X$  nichtsingulär ist, ist auch  $Y$  nichtsingulär.

Die Abbildung  $\sigma: Y \rightarrow X$  (dabei wird die Einschränkung weggelassen) heißt  $\sigma$ -**Prozess von  $X$  in  $\varepsilon \in X$** , wobei durch einen Koordinatenwechsel  $\varepsilon$  ein beliebiger Punkt von  $X$  sein kann. Wenn  $X$  nichtsingulär ist, kann dieser Prozess iteriert werden, da  $Y$  wieder eine nichtsinguläre quasiprojektive Varietät ist.

Beweis der Behauptungen: [40], Ch. II, §4.3.

Sei  $C \subset X$  eine quasiprojektive Varietät und  $P \in C$ . Sei  $C' := \overline{\sigma^{-1}(C \setminus \{P\})} \subset Y$ , wobei  $\sigma: Y \rightarrow X$  der  $\sigma$ -Prozess von  $X$  in  $P$  sei.  $C'$  heißt **strikte Transformierte** von  $C$ .  $\sigma: C' \rightarrow C$  (wobei die Einschränkung von  $\sigma$  unterdrückt wird) heißt **Blowup von  $C$  in  $P$** . Für eine Folge von  $m$  Blowups ist die strikte Transformierte von  $C$  iterativ definiert.

### 3.4 Das nichtsinguläre Modell einer Kurve

1. Sei  $X_0$  eine glatte irreduzible projektive Fläche und sei  $C \subset X_0$  eine abgeschlossene irreduzible Kurve. Es gibt eine Folge von glatten irreduziblen quasiprojektiven Flächen

$$X_m \xrightarrow{\sigma_{m-1}} X_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{\sigma_0} X_0$$

mit  $\sigma$ -Prozessen  $\sigma_m, \dots, \sigma_{m-1}$ , wobei  $\sigma_i$  in  $P_i$  zentriert sei, sodaß

$$C_i := \overline{\sigma_{i-1}^{-1}(C_{i-1} \setminus \{P_{i-1}\})} \subset X_i, \quad i = 1, \dots, m$$

abgeschlossene Varietäten Kurven sind, sodaß  $C_m$  nichtsingulär ist.

$$C_m \xrightarrow{\sigma_{m-1}} C_{m-1} \xrightarrow{\sigma_{m-2}} \dots \xrightarrow{\sigma_1} C_1 \xrightarrow{\sigma_0} C_0 = C$$

heißt eine Folge von Blowups.

$$\Sigma: C_m \rightarrow C, \Sigma := \sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_{m-1}$$

ist ein birationaler Morphismus mit

$$D(\Sigma^{-1}) = C \setminus (\{P_0, \sigma_0(P_1), \dots, (\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_{m-2})(P_{m-1})\} \cap C)$$

Seien  $Q_1, \dots, Q_s \in C_0$  die singulären Punkte von  $C_0$ . Sei  $j_0 \in \{1, \dots, s\}$ . Es wird dann ein Blowup in  $P_0 := Q_{j_0}$  angewendet. Ist unter den Punkten von  $\sigma_0^{-1}(P_0) \cap C_1$  ein singulärer Punkt von  $C_1$ , dann wird auf diesen wiederum ein Blowup angewendet. Führt man dieses Verfahren iterativ weiter bricht es nach endlich vielen Schritten ab mit einer Kurve  $C_i$ , die

nur noch Singularitäten in den Punkten  $(\sigma_{i-1}^{-1} \circ \dots \circ \sigma_0^{-1})(Q_j) \in C_i$ ,  $j \in \{1, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots, s\}$  hat. Nun wendet man das Verfahren auf diese Punkte an.

Beweis: [31], §8B, 8.4.

Wir wenden dies später auf  $C = V(F)$ ,  $F \in k[X, Y, Z] \setminus k$  homogen, eine irreduzible ebene projektive Kurve und  $X_0 = \mathbb{P}_k^2$  an.

2. Zu  $C$  gibt es also eine nichtsinguläre Kurve  $C_m$  und einen birationalen Morphismus  $f : C_m \rightarrow C$ .  $C_m$  heißt nichtsinguläres Modell von  $C$ . Es gilt  $k(C_m) \cong k(C)$ . Ist  $C'_m$ ,  $f' : C'_m \rightarrow C$  ein weiteres nichtsinguläres Modell von  $C$  dann gibt es genau einen Isomorphismus  $g : C_m \rightarrow C'_m$  mit  $f' \circ g = f$ .
3. Sei  $X_0$  eine glatte projektive Varietät. Sei  $X_1 \xrightarrow{\sigma} X_0$  ein Blowup von  $P \in X_0$ .

Sei  $A = n_1 A_1 + \dots + n_r A_r$  ein effektiver Weildivisor auf  $X_0$  mit irreduziblen Untervarietäten  $A_1, \dots, A_r$  von  $X_0$  mit  $\text{codim}_{X_0}(A_i) = 1$ . Setze  $A'_j := \overline{\sigma^{-1}(A_j \setminus \{P\})}$  für  $j = 1, \dots, r$  und  $A' := n_1 A'_1 + \dots + n_r A'_r$  ist dann ein Weildivisor auf  $X_1$ .  $A'$  heißt strikte Transformierte von  $A$ .

## 4 Der lokale ganze Abschluß eines Unterrings

### 4.1 Allgemeines

Sei in diesem Abschnitt  $k$  ein perfekter Körper.

**Definition 1** Sei  $F$  ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über  $k$ . Ein maximales Ideal eines diskreten Bewertungsrings von  $F$  heißt **Stelle** von  $F$ .

**Definition 2** Sei  $F$  ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über  $k$  und sei  $M$  eine Stelle von  $F$ .  $M$  ist also maximales Ideal eines diskreten Bewertungsrings von  $F$ . Dieser diskrete Bewertungsrings ist durch  $M$  eindeutig bestimmt, bezeichne ihn mit  $O_M$ . Es gilt  $O_M = \{z \in F \mid z^{-1} \notin M\}$ . Bezeichne mit  $v_M : F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  die diskrete Bewertung, die  $O_M$  zugeordnet ist.

**Definition 3** Sei  $F$  ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über  $k$  und  $F'$  ein algebraischer Funktionenkörper über  $k'$ .  $k' \subset F'$  heißt **algebraische Erweiterung** von  $k \subset F$  genau dann, wenn  $F \subset F'$  eine algebraische Körpererweiterung ist und  $k \subset k'$ .

Es gilt dann  $k \subset k'$  ist eine algebraische Körpererweiterung und  $F \cap k' = k$ .

**Definition 4** Sei  $k' \subset F'$  eine algebraische Erweiterung von  $k \subset F$ , sei  $P$  eine Stelle von  $F$  und sei  $P'$  eine Stelle von  $F'$ . Man sagt  $P'$  liegt über  $P$  genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1.  $P \subset P'$
2.  $O_P \subset O_{P'}$

3.  $\exists e \in \mathbb{N} : v_{P'}(z) = ev_P(z) \forall z \in F$   
 $e(P \subset P') := e$  heißt **Verzweigungsindex von  $P'$  über  $P$** .  
Ist  $e(P \subset P') = 1$  heißt  $P \subset P'$  **unverzweigt**, sonst **verzweigt**.

- Liegt  $P'$  über  $P$  dann gilt  $P = P' \cap F$  und  $O_P = O_{P'} \cap F$
- $P' \cap F$  ist die einzige Stelle von  $F$  über der  $P'$  liegt. Umgekehrt können über einer Stelle von  $F$  mehrere Stellen von  $F'$  liegen.

Beweis: [37], III.1.4, III.1.7.

**Definition 5** Sei  $F$  ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über  $k$ . Ein **Unterring der Körpererweiterung**  $k \subset F$  ist ein Ring  $R$  mit  $k \subset R \subset F$ , der kein Körper ist.

Es gilt dann:

- Für eine Stelle  $P$  von  $F$  ist  $O_P$  ein Unterring von  $k \subset F$ .
- $k[x_1, \dots, x_r]$  mit  $x_1, \dots, x_r \in F \setminus k$ ,  $r \in \mathbb{N}$  ist ein Unterring der Körpererweiterung  $k \subset F$  insbesondere also kein Körper (Beweis: [37], III.2.1).

**Definition 6** Sei  $E$  ein algebraischer Funktionenkörper über  $k$ . Sei  $S \neq \emptyset$  eine Menge von Stellen von  $E$ .

$$O_S := \bigcap_{P \in S} O_P = \{z \in E \mid v_P(z) \geq 0 \forall P \in S\}$$

heißt ein **Holomorphierung von  $E$** . Es gilt:

- Jeder diskrete Bewertungsring  $O_P$  von  $E$  ist ein Holomorphierung.  
Jeder Holomorphierung ist ein Unterring der Körpererweiterung  $k \subset E$ .
- Sei  $P$  eine Stelle von  $E$  und  $S, T \neq \emptyset$  eine Mengen von Stellen von  $E$ .  
Dann gilt  
 $O_S \subset O_P \Leftrightarrow P \in S$   
 $O_S = O_T \Leftrightarrow S = T$
- Sei  $S \neq \emptyset$  eine Menge von Stellen von  $E$ . Dann gilt:  
 $\text{quot}(O_S) = E$ .  
 $\overline{O_S}^E = O_S$  d.h.  $O_S$  ist ganz abgeschlossen.  
Beweis der Behauptungen: [37], III.2.3, III.2.5.

**Satz 7** Sei  $F$  ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über  $k$  und  $R$  ein Unterring der Körpererweiterung  $k \subset F$  und sei

$$S(R) := \{P \mid P \text{ Stelle von } F \text{ mit } R \subset O_P\}$$

Dann gilt  $\overline{R}^F = O_{S(R)}$ .  
Beweis: [37], III.2.6.

## 4.2 Anwendung auf $k(C)$

Sei  $C$  eine irreduzible Kurve. Wir wollen nun Satz 7 auf  $F = k(C)$  und  $R = \mathcal{O}_{C,P}$  für einen Punkt  $P \in C$  anwenden.  $s : C' \rightarrow C$  sei ein nichtsinguläres Modell von  $C$ .

**Corollar 8** Sei  $P \in C$ . Es gilt  $\overline{\mathcal{O}_{C,P}}^{k(C)} = \bigcap_{Q \in \{Q \in C' \mid s(Q) = P\}} \mathcal{O}_{C',Q}$ .

**Beweis.** Mit der Notation von Satz 7 sei  $F = k(C)$  und  $R = \mathcal{O}_{C,P}$  für ein  $P \in C$ , folgt aus diesem Satz

$$\overline{\mathcal{O}_{C,P}}^{k(C)} = \bigcap_{Q \in S(\mathcal{O}_{C,P})} \mathcal{O}_Q \text{ mit}$$

$$S(\mathcal{O}_{C,P}) = \{Q \mid Q \text{ Stelle von } k(C) \text{ mit } \mathcal{O}_{C,P} \subset \mathcal{O}_Q\}$$

Man hat eine bijektive Abbildung  $\varphi : \{\text{Stellen von } k(C) \simeq k(C')\} \rightarrow C'$ . Für den diskreten Bewertungsring  $\mathcal{O}_Q$  von  $k(C)$  und den lokalen Ring  $\mathcal{O}_{C',\varphi(Q)}$  des nichtsingulären Modells  $C'$  von  $C$  gilt  $\mathcal{O}_Q = \mathcal{O}_{C',\varphi(Q)}$ , also hat man

$$\overline{\mathcal{O}_{C,P}}^{k(C)} = \bigcap_{Q \in \{Q \in C' \mid \mathcal{O}_{C,P} \subset \mathcal{O}_{C',Q}\}} \mathcal{O}_{C',Q}$$

Außerdem  $\mathcal{O}_{C,P} \subset \mathcal{O}_{C',Q} \iff Q \in C'$  mit  $s(Q) = P$ . ■

## 5 Singuläre Kurven

Sei  $k$  algebraisch abgeschlossen. Sei  $C \subset \mathbb{P}_k^r$  eine projektive irreduzible Kurve.

### 5.1 Der ganze Abschluß des lokalen Rings

**Definition 9 (Conductor)** Seien  $S$  und  $T$  Ringe,  $S \subset T$ . Die Menge  $C_{T|S} := \{s \in S \mid sT \subset S\}$  heißt **Conductor von  $S$  in  $T$** .

*Bemerkung:*  $C_{T|S}$  ist ein Ideal von  $S$  und  $T$ .  $C_{T|S}$  ist das größte Ideal von  $S$ , das ein Ideal von  $T$  ist.

**Beweis.**  $C_{T|S}$  ist ein Ideal von  $S$ , denn seien  $s_1, s_2 \in C_{T|S} \Rightarrow s_1T \subset S, s_2T \subset S \Rightarrow (s_1 + s_2)T \subset S$  und sei  $\tilde{s} \in S, s \in C_{T|S} \Rightarrow (\tilde{s}s)T = \tilde{s}(sT) \subset S$

$C_{T|S}$  ist ein Ideal von  $T$ , denn seien  $\tilde{t} \in T, s \in C_{T|S} \Rightarrow (\tilde{t}s)T = s(\tilde{t}T) \subset S$ .

Angenommen  $\exists$  Ideal  $b \subset S$  mit  $C_{T|S} \subsetneq b$  mit  $Tb \subset b$ , dann gibt es ein  $s \in b \subset S$  und  $t \in T$  mit  $st \in T \setminus S$  und  $Ts \subset b \subset S$  also insbesondere  $ts \in S$  also ein Widerspruch. ■

Sei  $p : C' \rightarrow C$  ein nichtsinguläres Modell. Sei

$$\mathcal{O}_Q := \overline{\mathcal{O}_{C,Q}} = \bigcap_{P, p(P)=Q} \mathcal{O}_{C',P}$$

der ganze Abschluß von  $\mathcal{O}_{C,Q}$ . Die  $\mathcal{O}_Q$  sind die Halme des direkten Bildes  $\mathcal{O} = p_*(\mathcal{O}_{C'})$  von  $\mathcal{O}_{C'}$  und der Annihilator der Garbe  $\mathcal{O}/\mathcal{O}_C$  heißt **Conductor von  $\mathcal{O}$  nach  $\mathcal{O}_C$**  und wird mit  $C_{\mathcal{O}|\mathcal{O}_C}$  bezeichnet.  $C_{\mathcal{O}|\mathcal{O}_C}$  ist eine kohärente Idealgarbe auf  $C$  und definiert die Varietät  $S = \text{Sing}(C)$  auf  $C$ . Es gilt  $(C_{\mathcal{O}|\mathcal{O}_C})_Q = C_{\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}|\mathcal{O}_{C,Q}}$ . Sei  $S' := p^{-1}(S)$ .

$C_{\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}|\mathcal{O}_{C,Q}}$  ist das größte Ideal von  $\mathcal{O}_{C,Q}$ , das auch ein Ideal von  $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}$  ist.  $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}$  hat nur endlich viele maximale Ideale  $m_1, \dots, m_h$  (ein noetherscher Ring der nur endlich viele maximale Ideale hat heißt **semilokaler Ring**).  $\mathfrak{r}_Q := m_1 \cdot \dots \cdot m_h = \{f \in \overline{\mathcal{O}_{C,Q}} \mid f(P) = 0 \forall P \text{ mit } p(P) = Q\}$  heißt **Radikal** von  $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}$ . Es gilt dann  $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}} \supset k + \mathfrak{r}_Q \supset \mathcal{O}_{C,Q} \supset k + C_{\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}|\mathcal{O}_{C,Q}}$ .  
 $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}/\mathcal{O}_{C,Q}$  ist ein endlichdimensionaler  $k$ -Vektorraum. Sei

$$\delta_Q := \dim(\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}/\mathcal{O}_{C,Q})$$

für  $Q \in C$ .  $\delta_Q < \infty$  für alle  $Q \in C$  und  $\delta_Q > 0$  genau dann, wenn  $Q \in S = \text{Sing}(C)$ . Sei

$$\begin{aligned} \delta &:= \sum_{Q \in S} \delta_Q \\ \pi &:= p(C') + \delta. \end{aligned}$$

## 5.2 Satz von Riemann-Roch

Sei  $D$  ein Divisor auf  $C'$  mit  $\nu_P(D) = 0 \forall P \in S'$ . Da  $p : C' \setminus S' \rightarrow C \setminus S$  ein Isomorphismus ist, erhält man eine Untergarbe  $\mathcal{L}'(D)$  der konstanten Garbe  $k(C)$  auf  $C$  mit

$$\mathcal{L}'(D)_Q = \begin{cases} \mathcal{O}_{C,Q} & \text{für } Q \in S \\ \mathcal{L}(D)_Q & \text{für } Q \notin S \end{cases}$$

Dabei wird der Isomorphismus  $k(C') \simeq k(C)$  unterdrückt. Setze dann

$$\begin{aligned} L'(D) &:= H^0(C, \mathcal{L}'(D)) & \text{und} & & l'(D) &:= \dim L'(D) \\ I'(D) &:= H^1(C, \mathcal{L}'(D)) & \text{und} & & i'(D) &:= \dim I'(D) \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} l'(D) - i'(D) &= \deg(D) - \pi + 1 \text{ also} \\ l'(D) - 1 &= \deg(D) - \pi + i'(D) \end{aligned}$$

Damit hat man für  $D = 0$  wegen  $l'(0) = 1$ , daß

$$p(C') + \delta = \pi = i'(0) = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C)$$

Sei  $P_C$  das Hilbertpolynom von  $C$  und sei  $\chi(C) := P_C(0)$ . Sei das **arithmetische Geschlecht**

$$p_a(C) := 1 - \chi(C)$$

Dann gilt, da  $H^q(C, \mathcal{O}_C) = 0$  für  $q \geq 2$ ,  $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = \pi$  und  $\dim H^0(C, \mathcal{O}_C) = 1$ , daß

$$\chi(C) = 1 - \pi$$

also

$$p_a(C) = 1 - \chi(C) = \pi = p(C') + \delta$$

Für eine ebene Kurve  $C = V(F) \subset \mathbb{P}_k^2$  mit  $F \in k[X_0, X_1, X_2]$  irreduzibel homogen,  $\deg(F) = n$  ist  $\pi = 1 - \chi(C) = p_a(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . Damit hat man

$$p(C) := p(C') = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta$$

### 5.3 Differentiale

Sei  $\varpi \in D_k(k(C'))$  und sei  $Q \in S$ .  $\varpi$  heißt **regulär in  $Q$**  genau dann, wenn gilt

$$\sum_{P, p(P)=Q} \text{res}_P(f\varpi) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}_{C,Q}$$

Sei  $\underline{\Omega}'_Q$  die Menge der in  $Q$  regulären Differentiale.  $\underline{\Omega}'_Q$  ist ein  $\mathcal{O}_{C,Q}$ -Untermodul von  $D_k(k(C'))$ . Sei

$$\underline{\Omega}''_Q := \bigcap_{P, p(P)=Q} \underline{\Omega}_P$$

wobei  $\underline{\Omega}_P = D_k(\mathcal{O}_{C',P})$ . Es gilt  $\underline{\Omega}''_Q \subset \underline{\Omega}'_Q$ .  $\langle \varpi, f \rangle := \sum_{P, p(P)=Q} \text{res}_P(f\varpi)$  ist eine Bilinearform mit der  $\underline{\Omega}'_Q/\underline{\Omega}''_Q$  und  $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}/\mathcal{O}_{C,Q}$  zueinander dual sind. Beides sind  $\mathcal{O}_{C,Q}$ -Moduln und beide haben den Annihilator  $C_{\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}|\mathcal{O}_{C,Q}}$ . Damit ist

$$C_{\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}|\mathcal{O}_{C,Q}} = \{f \in \mathcal{O}_{C,Q} \mid v_P(f\varpi) \geq 0 \quad \forall P, p(P)=Q \quad \forall \varpi \in \underline{\Omega}'_Q\}$$

Seien  $m_{Q,1}, \dots, m_{Q,h_Q}$  die maximalen Ideale des ganzen Abschlusses  $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}$  und seien  $Q_{Q,1}, \dots, Q_{Q,h_Q} \in C'$  die entsprechenden Punkte. Dann gibt es  $a_{Q,1}, \dots, a_{Q,h_Q} \in \mathbb{N}$  mit

$$C_{\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}|\mathcal{O}_{C,Q}} = m_{Q,1}^{a_{Q,1}} \cdot \dots \cdot m_{Q,h_Q}^{a_{Q,h_Q}}$$

Sei

$$\begin{aligned} \Delta_Q &:= a_{Q,1}Q_{Q,1} + \dots + a_{Q,h_Q}Q_{Q,h_Q} \\ n_Q &:= \deg(\Delta_Q) \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\delta_Q + 1 \leq n_Q \leq 2\delta_Q$$

und  $n_Q = 2\delta_Q$ , wenn  $C$  ein vollständiger Durchschnitt in einem projektiven Raum ist oder auf einer nichtsingulären Fläche liegt. Beweis: [35], IV §3.11.

Für eine ebene projektive irreduzible Kurve  $C$  gilt also

$$n_Q = 2\delta_Q \tag{1}$$

insbesondere  $\sum_{Q \in C} n_Q = 2\delta$ . Schreibe für  $\delta$  auch  $\delta(C)$ .

## 6 Zu den adjungierten Idealen einer singulären ebenen Kurve

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

### 6.1 Definition

Sei  $C = V(F) \subset \mathbb{P}_k^2$ ,  $F \in k[X_0, X_1, X_2]$  irreduzibel,  $\deg(F) = n \geq 3$ , eine irreduzible projektive Kurve mit Geschlecht  $p(C)$ . Sei  $S := \bigoplus_{m \geq 0} S_m = k[X_0, X_1, X_2]$ .

**Definition 10 (adjungierte Ideale)** Sei  $A \subset S$  ein saturiertes Ideal mit  $F \in A$ ,  $A \not\subset \langle F \rangle$ .

Sei  $\pi : C' \rightarrow C$  ein nichtsinguläres Modell. Für  $Q \in C$  ein Punkt sei  $A_Q$  das lokale Ideal von  $A$  in  $Q$ , d.h.  $A_Q$  sei das Bild in  $\mathcal{O}_{C,Q}$  der Lokalisation von  $A$  in  $Q$ .  $A_Q \neq 0$ . Es gibt nur endlich viele Punkte  $Q \in C$  mit  $A_Q \subsetneq \mathcal{O}_{C,Q}$ . Sei nun  $Q \in C$ . Seien  $m_{Q,1}, \dots, m_{Q,h_Q}$  die maximalen Ideale des ganzen Abschlusses  $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}$  und seien  $Q_{Q,1}, \dots, Q_{Q,h_Q} \in C'$  die entsprechenden Punkte. Sei  $A'_Q := \overline{\mathcal{O}_{C,Q}} A_Q$ . Dann gibt es  $a_{Q,1}, \dots, a_{Q,h_Q} \in \mathbb{N}$  mit

$$A'_Q = m_{Q,1}^{a_{Q,1}} \cdot \dots \cdot m_{Q,h_Q}^{a_{Q,h_Q}}$$

$$\Delta(A) := \sum_{Q \in C} (a_{Q,1} Q_{Q,1} + \dots + a_{Q,h_Q} Q_{Q,h_Q})$$

ist ein effektiver Divisor auf  $C$ . Sei  $D$  ein Divisor auf  $C'$ , der durch Rückzug (bezüglich  $\pi$ ) einer Geraden im  $\mathbb{P}_k^2$  entsteht. (Die Gerade ist ein Weildivisor im  $\mathbb{P}_k^2$ , der zu einem Cartierdivisor  $(U_\alpha, F_\alpha)_\alpha$  korrespondiert. Dieser liefert mit  $f_\alpha := F_\alpha|_{U_\alpha \cap C}$  einen Cartierdivisor  $(\pi^{-1}(U_\alpha \cap C), f_\alpha)_\alpha$  auf  $C'$ , der zu einem Weildivisor  $D$  korrespondiert).

Es soll für  $A$  gelten, daß  $\text{Sing}(C) = V(A)$ .  $A$  heißt dann **adjungiertes Ideal von  $C$** , falls es ein  $M(C, A) \in \mathbb{N}_0$  gibt, sodaß die Abbildungen

$$\varrho_m : A_m \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(mD - \Delta(A)))$$

für jedes  $m \geq M(C, A)$  surjektiv sind.

**Definition 11** Sei  $(A, m)$  ein 1-dimensionaler lokaler Ring. Sei  $\bar{A}$  der ganze Abschluß von  $A$ . Seien  $m_1, \dots, m_h$  die maximalen Ideale von  $\bar{A}$ . Sei  $0 \neq I \subsetneq A$  ein Ideal von  $A$ . Sei  $I' := \bar{A}I$ . Dann gibt es  $a_1, \dots, a_h \in \mathbb{N}$  mit  $I' = m_1^{a_1} \cdot \dots \cdot m_h^{a_h}$ . Man sagt  $I$  **erfüllt die Bedingung (p)**, falls es für jedes  $(b_1, \dots, b_h) \in \mathbb{N}^h$  mit  $(b_1, \dots, b_h) \geq (a_1, \dots, a_h)$  (d.h.  $b_i \geq a_i$  für alle  $i = 1, \dots, h$ ) ein  $f \in I$  gibt, sodaß für jedes  $i \in \{1, \dots, h\}$  gilt

$$f \in \left( \bigcap_{j=1}^h m_j^{b_j} \right) \setminus m_i^{b_i+1}$$

Es gilt dann:

**Satz 12** Ist  $A$  ein adjungiertes Ideal von  $C$ , dann erfüllt  $A_Q$  die Bedingung (p) für jedes  $Q \in C$ .

Beweis: [8]

**Satz 13** Sei  $\mathcal{O}_{C,Q}$  ein lokaler Ring von  $C$  mit maximalem Ideal  $m$ . Dann ist  $C_{\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}|\mathcal{O}_{C,Q}}$  das größte Ideal von  $\mathcal{O}_{C,Q}$ , das die Bedingung (p) erfüllt.

Beweis: [8]

**Definition 14** Sei  $\mathfrak{G} \subset S$ , das größte homogene Ideal, das für jedes  $Q \in \text{Sing}(C)$  erfüllt, daß  $\mathfrak{G}_Q = C_{\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}|\mathcal{O}_{C,Q}}$ .

**Satz 15** Für jedes adjungierte Ideal  $A$  von  $C$  gilt  $A \subset \mathfrak{G}$ .

$\mathfrak{G}$  ist ein adjungiertes Ideal von  $C$ .

Beweis: [8].

**Satz 16** Für die Elemente von  $\mathfrak{G}$  gilt der Noethersche Fundamentalsatz, d.h.: Sei  $\Gamma$  ein effektiver Weildivisor im  $\mathbb{P}_k^2$ .  $\Gamma$  korrespondiert zu einem homogenen Polynom  $G \in k[X_0, X_1, X_2]$ . Sei  $(U_\alpha, F_\alpha)_\alpha$  der zu  $\Gamma$  korrespondierende Cartierdivisor. Sei  $f_\alpha := F_\alpha|_{U_\alpha \cap C}$  (also ist  $f_\alpha$  eine rationale Funktion auf  $C$ ). Sei  $\Gamma'$  der zu dem Cartierdivisor  $(\pi^{-1}(U_\alpha \cap C), f_\alpha)_\alpha$  korrespondierende effektive Weildivisor auf dem nichtsingulären Modell  $C'$  von  $C$  ( $\pi : C' \rightarrow C$  die Folge von Blowups). Sei  $\Sigma$  ein effektiver Weildivisor im  $\mathbb{P}_k^2$ , korrespondierend zu dem homogenen Polynom  $H \in k[X_0, X_1, X_2]$  und dem effektiven Weildivisor  $\Sigma'$  auf  $C'$ . Es gelte  $\Sigma' \geq \Gamma' + \Delta(\mathfrak{G})$ . Dann gibt es homogene  $A, B \in k[X_0, X_1, X_2]$  mit  $H = AF + BG$ .

Daraus folgt, daß die  $\varrho_m : \mathfrak{G}_m \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(mD - \Delta(\mathfrak{G})))$  surjektiv sind für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  und man hat einen weiteren Beweis, daß  $\mathfrak{G}$  ein adjungiertes Ideal ist.

Beweis: [15]

**Satz 17** Sei  $d(\mathfrak{G}) := \deg(\Delta(\mathfrak{G}))$ . Es ist äquivalent:

1.  $d(\mathfrak{G}) = 2\delta(C)$
2.  $|(n-3)D - \Delta(\mathfrak{G})|$  ist die kanonische Linearschar auf  $C'$ .

Wegen Gleichung 1 gelten (1.) und (2.), denn

$$d(\mathfrak{G}) = \deg(\Delta(\mathfrak{G})) = \sum_{Q \in C} n_Q = 2\delta(C)$$

$$\dim(\mathfrak{G}_{n-3}) = p(C).$$

Beweis: [15]

**Satz 18** Sei  $\mathcal{A}_m := |(mD - \Delta(\mathfrak{G}))|$ . Dann gilt für  $m \geq n-2$ :

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{A}_m) &= mn - (n-1)(n-2) + 2p(C) \\ \dim(\mathcal{A}_m) &= mn - (n-1)(n-2) + p(C) \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{A}_{n-2}) &= n-2 + 2p(C) \\ \dim(\mathcal{A}_{n-2}) &= n-2 + p(C) \end{aligned}$$

Außerdem gilt für die Hilbertfunktion  $H(m, R/\mathfrak{G})$  von  $R/\mathfrak{G}$ , wobei  $R := k[X_0, X_1, X_2]$ , daß  $\forall m \geq n-3$ :

$$\begin{aligned} H(m, R/\mathfrak{G}) &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p(C) \\ \delta(C) &= \max\{H(i, R/\mathfrak{G}) \mid i \geq 0\} \\ \dim(\mathfrak{G}_m) &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p(C) \end{aligned}$$

Ist  $\tilde{\mathfrak{G}}$  das Bild von  $\mathfrak{G}$  im homogenen Koordinatenring von  $C$ , dann ist  $\forall m \geq n-3$ :

$$\dim(\tilde{\mathfrak{G}}_m) = \begin{cases} p(C) & \text{für } m = n-3 \\ mn - (n-1)(n-2) + p(C) + 1 & \text{für } m \geq n-2 \end{cases} = \dim(\mathcal{A}_m) + 1$$

Für  $m \geq n - 3$  ist die rationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow C'' \subset \mathbb{P}_k^r$  ( $C''$  das Bild von  $\Phi$ ) mit  $r = \dim(\mathcal{A}_m) = \dim(\tilde{\mathfrak{G}}_m) - 1$  gegeben durch  $(A_0 : \dots : A_r)$  birational, wobei  $A_0, \dots, A_r$  eine Basis von  $\tilde{\mathfrak{G}}_m$  sei.  $C''$  ist nichtsingulär, bzw. äquivalent dazu normal (Eine quasiprojektive Varietät  $X$  heißt **normal** genau dann, wenn jeder Punkt  $P \in X$  eine affine Umgebung  $U \subset X$  hat mit  $k[U] = \overline{k[U]}$ ). Man sagt: die Elemente von  $\mathcal{A}_m$  schneiden auf  $C$  einen  $g_s^r$  aus ( $s = \deg(\mathcal{A}_m)$ ).

Insbesondere ist für  $p(C) = 0$  die rationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow C'' \subset \mathbb{P}_k^{n-2}$  ( $C''$  das Bild von  $\Phi$ ) gegeben durch  $(A_0 : \dots : A_{n-2})$  birational, wobei  $\tilde{\mathfrak{G}}_{n-2} =_k \langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle$  sei.  $C''$  ist eine rationale Normkurve.

**Beweis.** Sei  $m \geq n - 2$ . Wir haben  $i(\mathcal{A}_m) = 0$  und

$$p(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{d(\mathfrak{G})}{2}$$

Damit hat man

$$\deg(\mathcal{A}_m) = mn - d(\mathfrak{G}) = mn - (n-1)(n-2) + 2p(C)$$

Mit dem Satz von Riemann-Roch folgt also

$$\dim(\mathcal{A}_m) = \deg(\mathcal{A}_m) - p(C) = mn - d(\mathfrak{G}) - p(C) = mn - (n-1)(n-2) + p(C)$$

Im folgenden wird Satz 78 verwendet. Da  $\dim(\mathfrak{G}_{n-3}) = p(C)$ , ist  $H(n-3, R/\mathfrak{G}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p(C)$ . Da  $\mathfrak{G}$  ein adjungiertes Ideal ist, hat man

$$\dim(\mathfrak{G}_{n-2}) \geq (n-2)n - (n-1)(n-2) + p(C) + 1 = n-1 + p(C)$$

Angenommen  $\dim(\mathfrak{G}_{n-2}) > n-1 + p(C)$ . Dann wäre

$$\begin{aligned} H(n-2, R/\mathfrak{G}) &< \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) - p(C) = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p(C) = H(n-3, R/\mathfrak{G}) \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Also ist  $\dim(\mathfrak{G}_{n-2}) = n-1 + p(C)$  und damit  $H(n-2, R/\mathfrak{G}) = H(n-3, R/\mathfrak{G})$ , also  $\forall m \geq n-3$ :

$$\begin{aligned} H(m, R/\mathfrak{G}) &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p(C) \\ \dim(\mathfrak{G}_m) &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p(C) \end{aligned}$$

Für  $m = n-3, n-2, n-1$  ist  $\dim(\tilde{\mathfrak{G}}_m) = \dim(\mathfrak{G}_m)$ . Für  $m \geq n$  ist

$$\begin{aligned} \dim(\tilde{\mathfrak{G}}_m) &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p(C) - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + p(C) \\ &\quad - \frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{nm - n^2 + 2n}{2} + \frac{mn+n}{2} \\ &= mn + p(C) - (n-1)(n-2) + 1 \\ &= \dim(\mathcal{A}_m) + 1 \end{aligned}$$

■

**Satz 19**  $A$  ist ein adjungiertes Ideal von  $C$  genau dann, wenn  $\overline{\mathcal{O}_{C,Q}}A_Q = \mathcal{O}_{C,Q}A_Q$  für alle  $Q \in \text{Sing}(C)$ .

**Beweis.** Sei  $A$  ein adjungiertes Ideal und  $Q \in \text{Sing}(C)$ . Sei  $A'_Q := \overline{\mathcal{O}_{C,Q}}A_Q$ . Dann hat man  $\dim_k(\mathfrak{G}_Q/A_Q) = \dim_k(\mathfrak{G}_Q/A'_Q)$ , also  $A_Q = A'_Q$ .

Sei nun  $A'_Q = A_Q \forall Q \in \text{Sing}(C)$ . Man hat folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow & I(C)_m & \nearrow & \mathfrak{G}_m & \xrightarrow{\varrho'_m} & H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(mD - \Delta(\mathfrak{G}))) & \\
& & \searrow & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & A_m & \xrightarrow{\varrho_m} & H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(mD - \Delta(A))) & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & 0 & & 0 & 
\end{array}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
\dim_k(\mathfrak{G}_m/A_m) &= \sum_{Q \in \text{Sing}(C)} \dim_k(\mathfrak{G}_Q/A_Q) = \\
&= \sum_{Q \in \text{Sing}(C)} \dim_k(\mathfrak{G}_Q/A'_Q) = \\
&= \deg(\Delta(A) - \Delta(\mathfrak{G}))
\end{aligned}$$

und damit ist, da  $\mathfrak{G}$  ein adjungiertes Ideal ist und damit  $\varrho'_m$  surjektiv ist, auch  $\varrho_m$  surjektiv. ■

**Satz 20**  $A$  ist ein adjungiertes Ideal von  $C$  genau dann, wenn  $A_Q$  die Bedingung (p) erfüllt für jedes  $Q \in C$ .

*Beweis:* [8]

## 6.2 Vorbemerkungen

**Definition 21 (infinitesimal nahe Punkte)** Seien  $Y$  und  $X$  glatte irreduzible quasiprojektive Flächen und sei  $f : Y \rightarrow X$  eine endliche Folge von  $\sigma$ -Prozessen. Sei  $Q \in Y$ . Es gelte  $f(Q) = P \in X$ . Dann heißt  $Q$  **Punkt in einer infinitesimalen Umgebung von  $P$**  (Insbesondere liegt ein Punkt  $P \in X$  in einer Umgebung von sich selbst.  $P$  heißt echter Punkt von  $X$ ). Ist  $f' : Y' \rightarrow X$  eine weitere endliche Folge von Blowups und ist  $Q' \in Y'$  mit  $f'(Q') = P$ . Dann identifiziert man  $Q$  mit  $Q'$ , falls es offene Umgebungen  $U \subset Y$  mit  $Q \in U$  und  $U' \subset Y'$  mit  $Q' \in U'$  und  $f(U) = f'(U') = V$  und einen Isomorphismus  $g : U \rightarrow U'$  mit  $g(Q) = Q'$ , sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
Q' \in U' & & \\
g \uparrow & \searrow f' & \\
Q \in U & & V \ni P
\end{array}$$

Man sagt  $Q$  liegt in der 1. Umgebung von  $P$ , falls  $Q$  mit einem Punkt  $Q'$  identifiziert wird, wobei  $f' : Y' \rightarrow X$  der  $\sigma$ -Prozess in  $P$  ist,  $Q' \in Y'$  ist und  $f(Q') = P$ . Man sagt  $Q$  liegt in der  $i$ -ten infinitesimalen Umgebung

von  $P \in X$ , falls  $Q$  in der 1. Umgebung eines Punktes  $P'$  liegt und  $P'$  in der  $(i-1)$ -ten Umgebung von  $P$  liegt.

Sei  $Q$  ein Punkt in einer infinitesimalen Umgebung von  $P$ .  $P$  liege auf einer glatten irreduziblen quasiprojektiven Fläche  $Y$  mit einer endlichen Folge von  $\sigma$ -Prozessen  $f : Y \rightarrow X$ . Man sagt ein Weildivisor  $H$  auf  $X$  **geht mit Multiplizität  $r$  durch  $Q$** , wenn die strikte Transformierte von  $H$  bezüglich  $f$  mit Multiplizität  $r$  durch  $Q$  geht.

Sei  $C \subset X$  eine irreduzible Kurve. Sei  $P \in C$ . Sei  $Q$  ein Punkt in einer infinitesimalen Umgebung von  $P \in X$ . Sei dazu  $Q \in Y$ ,  $Y$  eine glatte irreduzible quasiprojektive Fläche,  $f : Y \rightarrow X$  eine endliche Folge von  $\sigma$ -Prozessen. Außerdem liege  $Q$  auf der strikten Transformatierten von  $C$  in bezug auf  $f$ . Dann heißt  $Q$  **infinitesimal nahe Punkt von  $P \in C$** . Die infinitesimal nahen Punkte von  $P \in C$ , die in der  $i$ -ten infinitesimalen Umgebung von  $P \in X$  liegen, bilden die  **$i$ -te infinitesimale Umgebung von  $P \in C$** .

Man weiß nun, daß es zu einer irreduziblen Kurve  $C_0 = C \subset \mathbb{P}_k^2$  eine Folge von nichtsingulären quasiprojektiven Flächen und  $\sigma$ -Prozessen  $\sigma_m, \dots, \sigma_{m-1}$

$$X_m \xrightarrow{\sigma_{m-1}} X_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \xrightarrow{\sigma_0} X_0$$

mit  $X_0 = \mathbb{P}_k^2$  und eine Folge von irreduziblen Kurven

$$C_i := \overline{\sigma_{i-1}^{-1}(C_{i-1} \setminus \{P_{i-1}\})} \subset X_i, \quad i = 1, \dots, m$$

mit  $C_i \subset X_i$  gibt, wobei  $\sigma_i$  der Blowup eines singulären Punktes  $P_i$  von  $C_i$  ist, sodaß  $C_m$  nichtsingulär ist.  $C_i$  ist die strikte Transformierte von  $C_{i-1}$ . Jeder infinitesimal nahe Punkt von  $P$  hat einen Repräsentanten, der auf einer der Kurven  $C_i$  liegt. Jede infinitesimale Umgebung von  $P \in C \subset X_0$  enthält nur endlich viele Punkte und es gibt eine infinitesimale Umgebung von  $P \in C$ , die nur einfache Punkte enthält. Nach obiger Definition werden die Punkte auf zwei verschiedenen nichtsingulären Modellen von  $C$  paarweise identifiziert, da es zwischen 2 nichtsingulären Modellen einen Isomorphismus gibt. Spreche deshalb von dem nichtsingulären Modell von  $C$ . Sei  $Q$  ein Punkt des nichtsingulären Modells von  $C$ , also  $OE P \in C_m$ , dann heißt  $(\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_{m-1})(Q) \in C$  Zentrum von  $Q$ .

**Definition 22** Sei  $P \in C$ , sei  $P_0 = P$  und  $P_i$  ein Punkt in der 1.-ten infinitesimalen Umgebung von  $P_{i-1}$  für  $i = 1, \dots, l$  und liege  $P_l$  auf dem nichtsingulären Modell von  $C$ . Dann heißt  $(P, P_1, \dots, P_{l-1}, P_l)$  **Auflösungsweig von  $C$  mit Ursprung in  $P$  und Ziel  $P_l$** . Es gibt genau einen Auflösungsweig  $(P, P_1, \dots, P_{l-1}, P_l)$  mit Ursprung in  $P$  und Ziel  $P_l$ .

**Definition 23** Sei  $P \in C$  und  $Q$  ein Punkt des nichtsingulären Modells  $C'$  mit Zentrum  $P$ . Durch  $P$  und  $Q$  ist genau ein Auflösungsweig von  $C$  festgelegt. Sei  $M_P$  das maximale Ideal von  $\mathcal{O}_{C,P}$ .  $l_{\mathcal{O}_{C',Q}}(\mathcal{O}_{C',Q}/(M_P \mathcal{O}_{C',Q}))$  heißt **Multiplizität dieses Auflösungsweiges**.

**Definition 24 (Doppelpunktdivisor)** Sei  $P \in C$  und seien  $Q_1, \dots, Q_r$  die Punkte des nichtsingulären Modells mit Zentrum  $P$ . Sei  $\gamma_i = (P_{i,0}, P_{i,1}, \dots, P_{i,n_i}, Q_i)$  der Auflösungsweig mit Ursprung  $P$  und Ziel  $Q_i$  für  $i = 1, \dots, r$  (insbesondere sei  $P_{i,0} = P$  für alle  $i = 1, \dots, r$ ).  $P_{i,h}$  liege auf  $C_{i,h}$  für  $h = 0, \dots, n_i$  und

$i = 1, \dots, r$  (also  $C_{i,h}$  ist die strikte Transformierte unter dem Blowup von  $C_{i,h-1}$  in  $P_{i,h-1}$  und  $C_{i,0} = C$ ).

Sei nun  $s_{i,h}$  die Multiplizität des Zweiges  $(P_{i,h}, P_{i,h+1}, \dots, P_{i,n_i}, Q_i)$  mit Ursprung  $P_{i,h}$  auf  $C_{i,h}$ .

Sei  $r_{i,h} := m_{P_{i,h}}(C_{i,h})$  die Multiplizität von  $P_{i,h}$  als Punkt von  $C_{i,h}$ .

Sei  $d_i := \sum_{h=1}^{n_i} s_{i,h} (r_{i,h} - 1)$

Der Divisor  $D(C) := \sum_{i=1}^r d_i Q_i$  auf dem nichtsingulären Modell von  $C$  heißt **Doppelpunktdivisor** von  $C$ .

**Definition 25** Sei  $H$  ein effektiver Weildivisor im  $\mathbb{P}_k^2$ . Sei  $(U_\alpha, F_\alpha)_\alpha$  der zu  $H$  korrespondierende Cartierdivisor. Sei  $f_\alpha := F_\alpha|_{U_\alpha \cap C}$  (also ist  $f_\alpha$  eine rationale Funktion auf  $C$ ). Man sagt  $H$  **schneidet den Doppelpunktdivisor**  $D(C)$  **aus**  $C$  **aus**, falls entweder gilt  $C \subset \text{supp}(H)$  oder  $C \not\subset \text{supp}(H)$  (dann insbesondere  $f_\alpha \neq 0$  für alle  $\alpha$ ) und  $H' \geq D(C)$ , wobei  $H'$  der zu dem Cartierdivisor  $(g^{-1}(U_\alpha \cap C), f_\alpha)_\alpha$  korrespondierende Weildivisor auf dem nichtsingulären Modell  $C'$  von  $C$  ist mit einer Folge von Blowups  $g : C' \rightarrow C$ . Die Bedingung  $H' \geq D(C)$  bedeutet nichts anderes als, daß  $\nu_{Q_i}(f_\alpha) \geq d_i$  mit  $D(C) = \sum_{j=1}^r d_j Q_j$ , wobei  $Q_i \in g^{-1}(U_\alpha \cap C)$  und  $\nu_{Q_i}$  die diskrete Bewertung von  $\mathcal{O}_{C', Q_i}$  bezeichnet.

### 6.3 Wichtige adjungierte Ideale

**Definition 26** Sei  $C$  eine irreduzible Kurve im  $\mathbb{P}_k^2$ . Sei  $H$  ein effektiver Weildivisor im  $\mathbb{P}_k^2$ .

1.  $H$  heißt **A1-adjungiert zu**  $C$  genau dann, wenn  $H$  durch jeden gewöhnlichen oder infinitesimal nahen Punkt von  $C$  der Multiplizität  $r$  mit Multiplizität mindestens  $r - 1$  geht. Bezeichne das Ideal erzeugt von den homogenen  $h \in k[X_0, X_1, X_2] \setminus k$  die zu einem A1-adjungierten Weildivisor  $H$  korrespondieren mit  $\mathfrak{N}$  (für Noether, siehe [6]).
2.  $H$  heißt **A2-adjungiert zu**  $C$  genau dann, wenn der Weildivisor  $H$  zu einem homogenen  $h \in k[X_0, X_1, X_2] \setminus k$  korrespondiert mit  $h \in \mathfrak{G}$  (für Gorenstein).
3.  $H$  heißt **A3-adjungiert zu**  $C$  genau dann, wenn er aus  $C$  den Doppelpunktdivisor ausschneidet. Bezeichne das Ideal erzeugt von den homogenen  $h \in k[X_0, X_1, X_2] \setminus k$  die zu einem A3-adjungierten Weildivisor  $H$  korrespondieren mit  $\mathfrak{K}$  (für Keller).

**Satz 27** Für einen effektiven Divisor  $H$  ist äquivalent:

1.  $H$  ist A2-adjungiert.
2.  $H$  ist A3-adjungiert.

Insbesondere ist  $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$  und  $D(C) = \Delta(\mathfrak{K}) = \Delta(\mathfrak{G})$ .

Beweis: [16].

**Satz 28** Jeder A1-adjungierte effektive Divisor ist A2-adjungiert und A3-adjungiert.

Beweis: [16].

Es existieren ebene Kurven auf denen es A2-adjungierte effektive Divisoren gibt, die nicht A1-adjungiert sind:

Sei  $C = V(F)$  mit  $F = u^5 - v^2z^3$ .  $C$  hat in  $P_0 = (0 : 1 : 0)$  einen Dreifachpunkt mit einem Doppelpunkt  $P_1$  in der 1. infinitesimalen Umgebung und in  $Q_0 = (0 : 0 : 1)$  einen Doppelpunkt mit einem Doppelpunkt  $Q_1$  in der 1. infinitesimalen Umgebung. Der Divisor gegeben durch  $u^3 = 0$  ist A2-adjungiert, nicht jedoch A1-adjungiert, denn er geht nicht durch  $Q_1$ .

Mit dem Verfahren aus Abschnitt 11.1, das in Abschnitt 28.2 implementiert ist, bekommt man

$$\mathfrak{G} = \langle u^3, u^2z, uvz, vz^2 \rangle$$

Die Funktion `adjointCurve` aus dem Maple-Paket `CASA` (Research Institute for Symbolic Computation (RISC-Linz), University of Linz), mit der man  $\mathfrak{N}_m$  für gegebenes  $m$  berechnen kann, liefert als Ergebnis  $\mathfrak{N}_3 = 0$  (dies ist jedoch nicht korrekt, denn z.B. der Divisor gegeben durch  $vz^2 = 0$  ist sowohl A1- als auch A2-adjungiert).

**Satz 29**  $C$  habe nur gewöhnliche Mehrfachpunkte. Dann ist für einen effektiven Divisor  $H$  äquivalent:

1.  $H$  ist A1-adjungiert.
2.  $H$  geht durch jeden gewöhnlichen  $r$ -fach-Punkt von  $C$  mindestens mit Multiplizität  $r - 1$ .
3.  $H$  ist A2-adjungiert.
4.  $H$  ist A3-adjungiert.

*Beweis:* [16].

## 6.4 Berechnung adjungierter Ideale

Wegen Abschnitt 6.1 ist der richtige Begriff von einem adjungierten Ideal einer ebenen singulären Kurve  $C$  das Ideal  $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$ . Bezeichne im weiteren das Ideal  $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$  als "das" **adjungierte Ideal** von  $C$ . Im 2. Teil wird ein Verfahren angegeben, das  $\mathfrak{G}$  für eine beliebige ebene singuläre irreduzible Kurve berechnet, außerdem ein Algorithmus, der für eine ebene singuläre irreduzible Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten  $\mathfrak{N}$  berechnet. Man beachte, daß in diesem Fall gilt  $\mathfrak{N} = \mathfrak{K} = \mathfrak{G}$ . Es gibt auch ein Verfahren, das  $\mathfrak{K}$  mittels Puiseuxreihen berechnen kann, wobei hier eine äquivalente klassische Definition von  $D(C)$  über ebene quadratische Transformationen verwendet wird. Dieses Verfahren ist in [41] angegeben.

## 7 Saturierung

### 7.1 Vorbemerkungen

1. Sei  $S$  ein kommutativer Ring. Sei  $f : R \rightarrow S$  ein Ringhomomorphismus.

Für ein Ideal  $J \subset S$  setze  $J^c := f^{-1}(J)$ .  $J^c$  ist ein Ideal in  $R$ .

Für ein Ideal  $I \subset R$  setze  $I^e := f(I)S$ .  $I^e$  ist ein Ideal in  $S$ .

Es gilt für Ideale  $I_1, I_2 \subset R$  und  $J_1, J_2 \subset S$ , daß  $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$ ,  $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$ ,  $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$ ,  $\sqrt{J_1^c} = \sqrt{J_1^e}$ ,  $I_1 \subset I_1^{ec}$ ,  $J_1^{ec} \subset J_1$ ,  $J_1^{cec} = J_1^c$ .

Ist  $P \subset S$  ein Primideal, dann ist  $P^c$  ein Primideal.

- Sei  $I$  ein Ideal in einem noetherschen Ring  $R$ . Sei  $\mathfrak{V}(I) := \{P \in \text{Spec}(R) \mid I \subset P\}$ .  $\mathfrak{V}(I)$  hat bezüglich Inklusion wenigstens ein minimales Element (Beweis: [36], 3.52). Ein solches minimales Element heißt **minimales Primideal von  $I$** . Die Menge der minimalen Primideale von  $I$  sei mit  $\text{Min}(I)$  bezeichnet.  $\text{Min}(I)$  ist die Menge der minimalen Elemente von  $\text{Ass}(I)$  bezüglich Inklusion (Beweis: [36], 4.24.). Die Elemente von  $\text{Min}(I)$  heißen **isolierte Primideale** von  $I$ . Die Elemente von  $\text{Ass}(I) \setminus \text{Min}(I)$  heißen **eingebettete Primideale** von  $I$ . Ist  $\sqrt{I} = I$ , dann ist  $\text{Ass}(I) = \text{Min}(I)$ .

## 7.2 Saturierung in multiplikativ abgeschlossenen Mengen

Sei  $R$  ein kommutativer Ring.

- Sei  $S \subset R$  multiplikativ abgeschlossen (mit  $1 \in S$ ). Seien  $(a, s), (b, t) \in R \times S$ .

$(a, s) \sim (b, t) :\Leftrightarrow \exists u \in S$  mit  $u(ta - sb) = 0$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $R \times S$ . Bezeichne die Äquivalenzklasse von  $(a, s)$  mit  $\frac{a}{s}$ .

$S^{-1}R := \{\frac{a}{s} \mid a \in R, s \in S\}$  wird mit  $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{ta + sb}{st}$  und  $\frac{a}{s} \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}$  zu einem Ring mit Nullelement  $\frac{0}{1}$  und Einselement  $\frac{1}{1}$ . Sei

$$f : R \rightarrow S^{-1}R, f(r) := \frac{r}{1}$$

- Sei  $S := R \setminus P$  mit einem Primideal  $P \subset R$  und  $f : R \rightarrow S^{-1}R, f(r) := \frac{r}{1}$ . Dann ist  $I^e$  (bezüglich  $f$ ) die Lokalisation von  $I$  in  $P$ .
- Ist  $Q$  ein Primärideal von  $R$  mit  $Q \cap S = \emptyset$ , dann gilt  $Q^{ec} = Q$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} (I_1 \cap I_2)^e &= I_1^e \cap I_2^e \\ \sqrt{I_1^e} &= \sqrt{I_1^e} \\ I_1^e = S^{-1}R &\Leftrightarrow I_1 \cap R \neq \emptyset \end{aligned}$$

Beweis: [36], 5.31.

Ist  $Q$  ein  $P$ -primäres Ideal von  $R$  mit  $Q \cap S = \emptyset$ , dann ist  $Q^e$  ein  $P^e$ -primäres Ideal von  $S^{-1}R$ .

Beweis: [36], 5.37.

- Sei  $Q$  ein  $P$ -primäres Ideal von  $R$ . Dann gilt:  $Q \cap S = \emptyset \Leftrightarrow P \cap S = \emptyset$
- Sei  $I \subset R$  zerlegbar und sei  $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i$  eine Primärzerlegung. Sei  $P_i := \sqrt{Q_i}$  für  $i = 1, \dots, r$ . Sei  $0 \leq m \leq r$ . Nehme an, daß die  $Q_i$  so indiziert sind, daß gilt:

$$\begin{aligned} P_i \cap S &= \emptyset \text{ für } i = 1, \dots, m \\ P_i \cap S &\neq \emptyset \text{ für } i = m + 1, \dots, r \end{aligned}$$

d.h.  $P_i \cap S = \emptyset$  für  $i = 1, \dots, r$  für  $m = r$  und  $P_i \cap S \neq \emptyset$  für  $i = 1, \dots, r$  für  $m = 0$ . Dann sind

$$I^e = \bigcap_{i=1}^m Q_i^e \text{ und } \sqrt{Q_i^e} = P_i^e$$

$$I^{ec} = \bigcap_{i=1}^m Q_i \text{ und } \sqrt{Q_i} = P_i$$

Primärzerlegungen. War die Primärzerlegung von  $I$  minimal, dann sind auch diese Primärzerlegungen minimal.

Für  $m = 0$  gilt:  $I^e = S^{-1}R$  und  $I^{ec} = R$ .

Beweis: [36], 5.40.

6. Es gilt  $I^{ec} = f^{-1}(S^{-1}Rf(I)) = \{x \in R \mid sx \in I \text{ für ein } s \in S\}$ .  
 $\text{sat}(I, S) := I^{ec}$  heißt **Saturierung von  $I$  in  $S$** . Schreibe auch  $IS^{-1}R \cap R = \text{sat}(I, S)$ .
7. Sei  $f \in R$  und sei  $S = \{f^t \mid t \in \mathbb{N}_0\}$  die multiplikativ abgeschlossene Menge erzeugt von  $f$ . Setze

$$\text{sat}(I, f) := \text{sat}(I, S) = \{x \in R \mid f^t x \in I \text{ für ein } t \in \mathbb{N}_0\}$$

8. Sei  $I = \bigcap_{i=1}^r Q_i$  eine minimale Primärzerlegung von  $I$ . Sei  $P_i := \sqrt{Q_i}$  für  $i = 1, \dots, r$ . Sei  $P_{i_0} \in \text{Min}(I)$ .  $S := R \setminus P_{i_0}$  ist multiplikativ abgeschlossen und es gilt  $\text{sat}(I, S) = Q_{i_0}$ .

**Beweis.** Es gilt  $S \cap P_{i_0} = \emptyset$ .  $S \cap P_i \neq \emptyset \forall i \neq i_0$ , denn wäre  $S \cap P_j = \emptyset$  für ein  $j \neq i_0$ , dann wäre  $P_j \subset P_{i_0}$ , ein Widerspruch zur Minimalität der Primärzerlegung oder der Minimalität von  $P_{i_0}$ . ■

### 7.3 Saturierung in Idealen

1. Seien  $I, J \subset k[X_1, \dots, X_n]$  Ideale. Setze

$$(I : J^\infty) := \bigcup_{d=1}^{\infty} (I : J^d) = \{x \in k[X_1, \dots, X_n] \mid xJ^d \subset I \text{ für ein } d \in \mathbb{N}\}$$

$(I : J^\infty)$  heißt **Saturierung von  $I$  im Ideal  $J$**  und ist ein Ideal. Es gilt  $(I : J^d) \subset (I : J^{d+1})$  und die aufsteigende Kette wird stationär, d.h.  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit

$$(I : J^\infty) = (I : J^N)$$

2. Für  $f \in k[X_1, \dots, X_n]$  setze

$$(I : f^\infty) := (I : \langle f \rangle^\infty)$$

Es gilt  $(I : f^\infty) = \text{sat}(I, f)$ .

3. Seien  $I, J \subset k[X_1, \dots, X_n]$  Ideale und seien  $I = \langle f_1, \dots, f_t \rangle$ ,  $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ . Sei  $R' := k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_s]$ . Dann gilt:

$$(I : J^\infty) = ({}_{R'} \langle f_1, \dots, f_t \rangle : (Y_1 g_1 + \dots + Y_s g_s)^\infty) \cap k[X_1, \dots, X_n]$$

siehe [11], 15.41.

4. Für ein Ideal  $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$  setze

$$\bar{I} := \{x \in k[X_1, \dots, X_n] \mid \forall i = 1, \dots, n \text{ gibt es } n_i \in \mathbb{N} \text{ mit } X_i^{n_i} x \in I\}$$

Es gilt  $\bar{I} = (I : \langle X_1, \dots, X_n \rangle^\infty)$ .  $I$  heißt saturiert genau dann, wenn  $I = \bar{I}$ .

## 8 Quadratische Transformationen

Sei  $C = V(F)$ ,  $F \in k[X, Y, Z] \setminus k$  homogen, eine irreduzible ebene projektive Kurve.

1. Seien  $P := (0 : 0 : 1)$ ,  $P' := (0 : 1 : 0)$ ,  $P'' := (1 : 0 : 0)$ . Diese Punkte heißen Fundamentalpunkte.

Seien  $L := V(Z)$ ,  $L' := V(Y)$ ,  $L'' := V(X)$ .

$U := \mathbb{P}_k^2 \setminus V(XYZ)$  ist offen in  $\mathbb{P}_k^2$ .  $P, P', P'' \in V(XYZ)$ ,  $L, L', L'' \subset V(XYZ)$ .

Definiere  $Q : \mathbb{P}_k^2 \setminus \{P, P', P''\} \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ ,  $Q(x : y : z) := (yz : xz : xy)$ .  $Q$  ist ein Morphismus.  $P, P', P''$  heißen Fundamentalpunkte von  $Q$ .  $L, L', L''$  heißen exzeptionelle Geraden von  $Q$ .

$Q(\mathbb{P}_k^2 \setminus \{P, P', P''\}) = U \cup \{P, P', P''\}$ ,  $Q^{-1}(P) = L \setminus \{P', P''\}$ ,  $Q^{-1}(P') = L' \setminus \{P, P''\}$ ,  $Q^{-1}(P'') = L'' \setminus \{P, P'\}$ ,  $Q^2(x : y : z) = (x : y : z) \forall (x : y : z) \in U$ , also:

$Q|_U : U \rightarrow U$  ist ein Isomorphismus mit  $(Q|_U)^{-1} = Q|_U$ .

Sei  $[Q]$  die  $Q$  zugeordnete rationale Abbildung (Äquivalenzklasse von Morphismen).  $[Q] : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  ist eine birationale Transformation und heißt quadratische Transformation.

2. Setze voraus, daß  $C$  keine exzeptionelle Gerade ist. Dann ist  $C \cap U \neq \emptyset$ , offen in  $C$  und abgeschlossen in  $U$ . Damit ist auch  $Q^{-1}(C \cap U)$  abgeschlossen in  $U$ . Sei  $C' := \overline{Q^{-1}(C \cap U)}$  der Abschluß von  $Q^{-1}(C \cap U)$  in  $\mathbb{P}_k^2$ . Dann ist  $Q|_{C' \setminus \{P, P', P''\}} : C' \setminus \{P, P', P''\} \rightarrow C$  ein birationaler Morphismus.

3.  $F^Q(X, Y, Z) := F(YZ, XZ, XY)$  heißt **totale Transformierte** von  $F$ .

4. Sei  $m_P(C) = r$  (OE  $P := (0 : 0 : 1)$ ). Also kann man schreiben

$$F(X, Y, Z) = F_r(X, Y) Z^{n-r} + F_{r+1}(X, Y) Z^{n-r-1} + \dots + F_n(X, Y)$$

mit  $F_i \in k[X, Y]$  homogen mit  $\deg(F_i) = i$ . Damit ist

$$\begin{aligned} F^Q(X, Y, Z) &= F_r(YZ, XZ)(XY)^{n-r} + F_{r+1}(YZ, XZ)(XY)^{n-r-1} + \dots + F_n(YZ, XZ) \\ &= Z^r \left( F_r(Y, X)(XY)^{n-r} + Z F_{r+1}(Y, X)(XY)^{n-r-1} + \dots + Z^{n-r} F_n(Y, X) \right) \end{aligned}$$

also gilt:  $Z^r \mid F^Q(X, Y, Z)$  und  $Z^{r+1} \nmid F^Q(X, Y, Z)$ . Damit hat man, wenn  $m_P(C) = r$ ,  $m_{P'}(C) = r'$ ,  $m_{P''}(C) = r''$  daß  $F^Q(X, Y, Z) = Z^r Y^{r'} X^{r''} F'(X, Y, Z)$  wobei  $Z, Y, X \nmid F'(X, Y, Z)$ .  $F'$  heißt **quadratisch Transformierte** von  $F$ .  $\deg(F') = \deg(F^Q) - r - r' - r'' = 2n - r - r' - r''$ .

$$\begin{aligned} (F^Q)^Q(X, Y, Z) &= F^Q(YZ, XZ, XY) = F(XZXY, YZXY, YZXX) = \\ &= (XYZ)^n F(X, Y, Z) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (F')^Q(X, Y, Z) &= \left( \frac{F^Q}{Z^r Y^{r'} X^{r''}} \right)^Q(X, Y, Z) = \frac{(F^Q)^Q(X, Y, Z)}{(Z^r Y^{r'} X^{r''})^Q} = \\ &= \frac{(XYZ)^n}{(XY)^r (XZ)^{r'} (YZ)^{r''}} F(X, Y, Z) = \\ &= X^{n-r-r'} Y^{n-r-r''} Z^{n-r'-r''} F(X, Y, Z) \end{aligned}$$

also  $(F')' = F$ .  $F'$  ist irreduzibel. Da  $U \cap V(XYZ) = \emptyset$  gilt  $Q^{-1}(C \cap U) \subset V(F')$ . Da  $V(F')$  irreduzibel gilt  $C' = \overline{Q^{-1}(C \cap U)} = V(F')$ .

$$\begin{aligned} F'(X, Y, Z) &= \frac{F^Q(X, Y, Z)}{Z^r Y^{r'} X^{r''}} = \frac{1}{Y^{r'} X^{r''}} \sum_{i=0}^{n-r} F_{r+i}(Y, X) (XY)^{n-r-i} Z^i = \\ &= \sum_{i=0}^{n-r} F_{r+i}(Y, X) X^{n-r-r''-i} Y^{n-r-r'-i} Z^i \end{aligned}$$

Man hat also  $m_P(C') = n - r' - r''$  und genauso  $m_{P'}(C') = n - r - r''$  und  $m_{P''}(C') = n - r - r'$ .

5. Wenn keine exzeptionelle Gerade Tangente an  $C$  in einem Fundamentalkpunkt ist, sagt man  $C$  **ist in guter Position**.

Ist  $C$  in guter Position, dann ist  $C'$  in guter Position.

Beweis: [13], Ch. VII.4.(4).

6. Sei  $C$  in guter Position und sei  $(C' \cap L) \setminus \{P', P''\} = \{P_1, \dots, P_s\}$ . Dann gilt  $m_{P_i}(C') \leq I_{P_i}(C', L)$  und  $\sum_{i=1}^s I_{P_i}(C', L) = m_P(C)$ .

Beweis: [13], Ch. VII.4.(6).

7. Man sagt  $C$  **ist in exzellenter Position** genau dann, wenn  $C$  in guter Position ist und  $L$  die Kurve  $C$  in  $n$  verschiedenen Nichtfundamentalkpunkten transversal schneidet und  $L'$  und  $L''$  jeweils  $C$  in  $n - r$  verschiedenen Nichtfundamentalkpunkten transversal schneiden, wobei  $r = m_P(C)$ . Diese Bedingung ist nicht symmetrisch in  $P, P', P''$ .

Ist  $C$  in exzellenter Position, dann gilt:

- (a) Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen den Mehrfachpunkten in  $C \cap U$  und in  $C' \cap U$ , die die Multiplizität erhält und gewöhnliche Mehrfachpunkte von  $C$  auf gewöhnliche Mehrfachpunkte von  $C'$  abbildet.
- (b)  $P, P', P''$  sind gewöhnliche Mehrfachpunkte von  $C'$  mit  $m_P(C') = n$ ,  $m_{P'}(C') = n - r$ ,  $m_{P''}(C') = n - r$ .

- (c) Es gibt keine Nichtfundamentalpunkte auf  $C' \cap L'$  und keine Nichtfundamentalpunkte auf  $C' \cap L''$ . Sei  $(C' \cap L) \setminus \{P', P''\} = \{P_1, \dots, P_s\}$ . Dann gilt  $m_{P_i}(C') \leq I_{P_i}(C', L)$  und  $\sum_{i=1}^s I_{P_i}(C', L) = m_P(C)$ .

Beweis: [13], Ch. VII.4.(7).

8. Für eine beliebige irreduzible projektive ebene Kurve  $C$  vom Grad  $n$  mit Mehrfachpunkten  $Q_1, \dots, Q_t$  mit  $s_i = m_{Q_i}(C)$  setze

$$g^*(C) := \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{i=1}^t \frac{s_i(s_i-1)}{2}$$

Sei  $(C' \cap L) \setminus \{P', P''\} = \{P_1, \dots, P_s\}$  und  $r_i = m_{P_i}(C')$ . Dann gilt

$$g^*(C') = g^*(C) - \sum_{i=1}^s \frac{r_i(r_i-1)}{2}$$

9. Sei  $C$  eine irreduzible projektive ebene Kurve und  $W \in C$ . Es gibt einen projektiven Koordinatenwechsel  $T$  mit  $T(0:0:1) = W$ , sodaß die mit  $T$  transformierte Kurve in exzellerter Position ist.

Beweis: [13], Ch. VII.4. Lemma 1.

Eine **allgemeine quadratische Transformation** sei eine quadratische Transformation komponiert mit einem projektiven Koordinatenwechsel  $T$ . Gilt  $T(0:0:1) = W$  und die mit  $T$  transformierte Kurve ist in exzellerter Position, dann sagt man, die allgemeine quadratische Transformation ist zentriert in  $W$ .

10. Durch eine endliche Sequenz von allgemeinen quadratischen Transformationen, kann  $C$  in eine Kurve transformiert werden, die nur gewöhnliche Mehrfachpunkte hat.

Beweis: [13], Ch. VII.4. Theorem 2.

## Teil II

# Konstruktive Verfahren

## 9 Konstruktion einer Ganzheitsbasis

### 9.1 Vorbemerkungen

**Definition 30 (ganz)** Seien  $S$  und  $T$  Ringe,  $S \subset T$ .  $t \in T$  heißt **ganz über**  $S$ , wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- Es gibt eine endliche Menge  $\{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subset S$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit  $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ .
- Der Ring  $S[t]$  ist ein endlich erzeugter  $S$ -Modul.
- Der Ring  $S[t]$  ist enthalten in einem Unterring  $R$  von  $T$ , der ein endlich erzeugter  $S$ -Modul ist.

- Es gibt einen endlich erzeugten  $S$ -Modul  $M \subset T$  mit:

1.  $tM \subset M$
2. Es gilt  $\forall y \in S[t]: ((yz = 0 \forall z \in M) \Rightarrow (y = 0))$

Beweis der Äquivalenz: [43], Volume I, Ch. V, §1.

**Definition 31** Wenn jedes  $t \in T$  ganz über  $S$  ist, dann heißt  $T$  **ganz über  $S$** .

**Definition 32 (ganzer Abschluss)** Seien  $S$  und  $T$  Ringe,  $S \subset T$ . Die Menge  $\overline{S}^T := \{t \in T \mid t \text{ ganz über } S\}$  ist ein Ring mit  $S \subset \overline{S}^T \subset T$ .  $\overline{S}^T$  heißt **ganzer Abschluß von  $S$  in  $T$** . Ist  $S$  ein Integritätsring, setze  $\overline{S} := \overline{S}^{\text{quot}(S)}$ .

Beweis der Behauptung: [43], Volume I, Ch. V, §1.

## 9.2 Verfahren

### 9.2.1 Voraussetzungen

1. Das beschriebene Verfahren wurde in [24] angegeben.

$L$  sei ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(L) = 0$ .

Sei  $x$  transzendent über  $L$  und sei  $y$  algebraisch über  $L(x)$  mit Minimalpolynom  $f$ .

Wir nehmen weiter an, daß  $y$  ganz über  $L[x]$  ist, d.h.  $f$  ist ein Polynom mit Koeffizienten in  $L[x]$ .

Sei  $K \subset L$  ein Unterkörper von  $L$  und  $f$  habe Koeffizienten in  $K[x]$ . Setze  $n := \deg(f)$ .

$\overline{L[x]}$  bezeichne (abweichend von der sonstigen Notation) den ganzen Abschluß von  $L[x]$  in  $L(x, y)$ . Es gilt  $\overline{L[x, y]} = \overline{L[x, y]}^{L(x, y)} = \overline{L[x]}^{L(x, y)}$ , insbesondere  $L[x, y] \subset \overline{L[x]} \subset L(x, y)$ .

2. Die Voraussetzungen können für ebene Kurven erfüllt werden:

Sei  $C = \{P \in \mathbb{A}_L^2 \mid F(P) = 0\}$  mit  $F \in K[X, Y]$  und  $F$  irreduzibel über  $\overline{K}$ ,  $n := \deg(F)$ . Sei  $L[C] = L[X, Y]/(F)$  der Koordinatenring und  $L(C) = \text{quot}(L[C])$  der Körper der rationalen Funktionen auf  $C$ . Sei  $x = \overline{X} \in L[C]$  und  $y = \overline{Y} \in L[C]$ , also  $L[C] = L[x, y]$ , und  $f := F(x, Y)$ . Die Bedingung, daß  $y$  ganz über  $L[x]$  ist, kann erfüllt werden und bedeutet, daß der Punkt  $(0 : 1 : 0)$  nicht auf dem projektiven Abschluß von  $C$  liegt (siehe dazu die Betrachtung bei Satz 55, wo das Verfahren auf ebene Kurven angewendet wird).

**Definition 33** Eine Ganzheitsbasis von  $\overline{L[x]}$  über  $L[x]$  ist eine Menge von Elementen  $b_0, \dots, b_{n-1} \in L(x, y)$  mit

$$\overline{L[x]} = L[x] b_0 + \dots + L[x] b_{n-1}$$

### 9.2.2 Ziel des Algorithmus

Ziel des Algorithmus ist es eine solche Ganzheitsbasis zu finden, wobei zusätzlich gefordert wird, daß  $b_0, \dots, b_{n-1} \in K(x, y)$ .

Man kann Elemente von  $L(x, y)$  als Polynome in  $y$  mit Koeffizienten in  $L(x)$  vom Grad kleiner als  $n$  in  $y$  auffassen, d.h. als Elemente in  $L(x)[y]$  vom Grad kleiner als  $n$  in  $y$ , denn  $L(x, y) \simeq L(x)[Y]/(f)$ . Ebenso kann man Elemente von  $K(x, y)$  als Elemente in  $K(x)[y]$  vom Grad kleiner als  $n$  in  $y$  auffassen. Damit ist für Elemente von  $L(x, y)$  der Grad  $\deg$  in  $y$  wohldefiniert.

Sei zunächst eine Ganzheitsbasis  $b_0, \dots, b_{n-1} \in L(x, y)$  mit  $\overline{L[x]} = L[x]b_0 + \dots + L[x]b_{n-1}$  gegeben. Schreibe

$$b_i = \sum_{j=0}^{n-1} b_{i,j} y^j \text{ für } i = 0, \dots, n-1$$

Die Matrix  $B := ((b_{i,j}))_{i,j=0,\dots,n-1} \in L(x)_{n,n}$  kann mittels elementarer Zeilentransformationen mit Einträgen in  $L[x]$  und Spaltenvertauschungen in eine linke untere Dreiecksmatrix  $B' := ((b'_{i,j}))_{i,j=0,\dots,n-1} \in L(x)_{n,n}$  transformiert werden. Setze

$$b'_i := \sum_{j=0}^{n-1} b'_{i,j} y^j \text{ für } i = 0, \dots, n-1$$

Damit ist klar, daß  $b'_0, \dots, b'_{n-1} \in \overline{L[x]}$ , denn  $L[x] \subset \overline{L[x]}$  und elementare Zeilentransformationen mit Einträgen in  $L[x]$  angewendet auf  $B$  bedeuten nichts anderes als  $L[x]$ -Kombinationen von  $b_0, \dots, b_{n-1}$ . Spaltenvertauschungen haben keine Auswirkung auf  $\sum_{j=0}^{n-1} b'_{i,j} y^j$ . Es gilt dann

$$\deg(b'_i) = i \text{ für } i = 0, \dots, n-1$$

Man konstruiert induktiv eine Ganzheitsbasis  $b_0, \dots, b_{n-1} \in K(x, y)$  mit  $\deg(b_i) = i$ :

### 9.2.3 Grundgerüst des Algorithmus

Setze  $b_0 = 1$ . Dann gilt  $b_0 L[x] = L[x] = \{a \in \overline{L[x]} \mid \deg(a) = 0\}$ .

Seien nun  $b_0, \dots, b_{d-1} \in \overline{L[x]}$  gegeben mit

$$\begin{aligned} \deg(b_i) &= i \text{ für } i = 0, \dots, d-1 \\ \sum_{i=0}^{d-1} L[x] b_i &= \{a \in \overline{L[x]} \mid \deg(a) \leq d-1\} \\ b_i &\in K(x, y) \text{ für } i = 0, \dots, d-1 \end{aligned}$$

Hat man einen Algorithmus um ein  $b_d \in K(x, y)$  zu finden mit  $\deg(b_d) = d$ , sodaß

$$\sum_{i=0}^d L[x] b_i = \{a \in \overline{L[x]} \mid \deg(a) \leq d\}$$

kann man induktiv eine Ganzheitsbasis angeben, wobei der Algorithmus nach Berechnung von  $b_{n-1}$  abbricht, denn  $\overline{L[x]} = \{a \in \overline{L[x]} \mid \deg(a) \leq n-1\}$ .

### 9.2.4 Algorithmus zur Bestimmung von $b_d$

**Grundgerüst des Algorithmus zur Bestimmung von  $b_d$**  Setze  $b_d := yb_{d-1}$ . Damit gilt  $b_d \in \overline{L[x]}$  und  $\deg(b_d) = d$ , insbesondere  $b_d \notin \sum_{i=0}^{d-1} L[x] b_i$ .

Betrachte  $V(b_d) := \left\{ a \in \overline{L[x]} \mid \deg(a) \leq d, a \notin \sum_{i=0}^d L[x] b_i \right\}$

Führe folgende Schritte aus, solange  $V(b_d) \neq \emptyset$ :

- Wähle ein  $a \in V(b_d) \subset \overline{L[x]}$  das man darstellen kann als  $a = \frac{\sum_{i=0}^d a_i b_i}{k}$  mit  $a_0, \dots, a_{d-1}, k \in K[x]$  und  $a_d = 1$ . Dann gilt

$$\sum_{i=0}^d L[x] b_i \subset \sum_{i=0}^{d-1} L[x] b_i + L[x] a \subset \overline{L[x]}$$

denn sei  $w = \sum_{i=0}^d w_i b_i \in \sum_{i=0}^d L[x] b_i$ . Dann gilt mit  $b_d = ka - \sum_{i=0}^{d-1} a_i b_i$ , daß

$$w = \sum_{i=0}^{d-1} (w_i - w_d a_i) b_i + w_d ka \in \sum_{i=0}^{d-1} L[x] b_i + L[x] a$$

denn  $w_d, k \in L[x]$ .

Außerdem gilt  $\deg(a) = d$

- Setze nun  $b_d := a$

Es bleiben noch die folgenden 3 Probleme zu klären:

1. Es ist zu zeigen, daß der Algorithmus terminiert.
2. Es ist zu zeigen, daß falls  $V(b_d) \neq \emptyset$  ein  $a \in V(b_d)$  existiert, das sich darstellen läßt als  $\frac{\sum_{i=0}^d a_i b_i}{k}$  mit  $a_0, \dots, a_{d-1}, k \in K[x]$  und  $a_d = 1$ .
3. Es muß ein Verfahren angegeben werden, das entscheidet, ob  $V(b_d) \neq \emptyset$  und, falls  $V(b_d) \neq \emptyset$  ist,  $a_0, \dots, a_{d-1}, k \in K[x]$  angibt, sodaß  $\frac{\sum_{i=0}^{d-1} a_i b_i + b_d}{k} \in V(b_d)$ .

### Beweis, daß der Algorithmus terminiert

**Definition 34 (Trace)** Sei  $N \subset N'$  eine endliche algebraische Körpererweiterung vom Grad  $n$  und sei  $\Omega^T := (w_1, \dots, w_n)$  eine Basis, also  $N' = N(w_1, \dots, w_n)$ . Es gilt also  $\forall x \in N'$ :

$\exists A = ((a_{i,j}))_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in N_{n,n}$  mit  $x\Omega = A\Omega$ .  $A$  ist eindeutig bestimmt durch  $\Omega$

und  $x$ . Da  $x\Omega = A\Omega$  gilt  $\det(xE - A) = 0$  also ist  $x$  Nullstelle des normierten Polynoms  $\det(XE - A) \in N[X]$  mit  $\deg(\det(XE - A)) = n$ . Das Polynom  $\det(XE - A)$  ist unabhängig von der Basis  $\{w_1, \dots, w_n\}$  (Beweis [43], Volume I, Ch. II, §10) und heißt Körperpolynom von  $x$  in der Körpererweiterung  $N \subset N'$ . Setze  $X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n := \det(XE - A)$ , also gilt  $a_1 = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$  und  $a_n = (-1)^n \det(A)$ . Definiere nun die Norm  $N_{N'/N}(x)$  und Trace  $Tr_{N'/N}(x)$  von  $x$  in der endlichen algebraischen Körpererweiterung  $N \subset N'$  vom Grad  $n$  durch:

$$N_{N'/N}(x) := \det(A) = (-1)^n a_n \in N$$

$$\text{Tr}_{N'/N}(x) := \sum_{i=1}^n a_{ii} = -a_1 \in N$$

Bemerkungen: Es gilt:

$$\text{Tr}_{N'/N}(x+y) = \text{Tr}_{N'/N}(x) + \text{Tr}_{N'/N}(y) \quad \forall x, y \in N'$$

$$\text{Tr}_{N'/N}(cx) = c\text{Tr}_{N'/N}(x) \quad \forall x \in N', c \in N$$

$$\text{Tr}_{N'/N}(c) = nc \quad \forall c \in N$$

Das Körperpolynom ist nicht notwendig das Minimalpolynom von  $x$ , sondern eine Potenz des Minimalpolynoms von  $x$  über  $N$ . Das Körperpolynom ist gleich dem Minimalpolynom genau dann, wenn  $x$  ein primitives Element von  $N'$  über  $N$  ist, also genau dann, wenn  $N' = N(x)$ .

Ist  $R$  ein Integritätsring,  $N := \text{quot}(R)$ ,  $R$  ganz abgeschlossen, d.h.  $R = \overline{R}^N$ ,  $N'$  eine endliche, algebraische, separable Körpererweiterung von  $N$  und  $R'$  eine ganze Ringerweiterung von  $R$  mit  $\text{quot}(R') = N'$ . Dann gilt  $\text{Tr}_{N'/N}(R') \subset R$  (Beweis: [43], Volume I, Ch. V, Theorem 4).

**Definition 35** Seien  $e_1, \dots, e_n \in L(x, y)$ , und sei  $L(x) \subset L(x, y)$  eine endliche algebraische Körpererweiterung vom Grad  $n$ .

$$\text{disc}(e_1, \dots, e_n) := \det \left( ((\text{Tr}(e_i e_j)))_{i,j=1, \dots, n} \right)$$

heißt **Diskriminante** von  $e_1, \dots, e_n$ . Dabei sei  $\text{Tr} : L(x, y) \rightarrow L(x)$ ,  $\text{Tr}(x) := \text{Tr}_{L(x,y)/L(x)}(x)$ .

Sind  $e_1, \dots, e_n \in \overline{L[x]}$  dann gilt  $\text{disc}(e_1, \dots, e_n) \in L[x]$ .

Betrachte nun  $\text{disc}(b_0, \dots, b_d, y^{b+1}, \dots, y^{n-1}) \in L[x]$ . Ersetze nun  $b_d$  durch  $a = \frac{\sum_{i=0}^d a_i b_i}{k} \in V(b_d)$  mit  $a_0, \dots, a_d, k \in K[x]$  und  $a_d = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \text{disc}(b_0, \dots, b_{d-1}, a, y^{b+1}, \dots, y^{n-1}) = \\ & \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(b_0^2) & \dots & \text{Tr}(b_0 \frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k}) & \dots & \text{Tr}(b_0 y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(b_{d-1} b_0) & \dots & \text{Tr}(b_{d-1} \frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k}) & \dots & \text{Tr}(b_{d-1} y^{n-1}) \\ \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} b_0) & \dots & \text{Tr}\left(\left(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k}\right)^2\right) & \dots & \text{Tr}\left(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} y^{n-1}\right) \\ \text{Tr}(y^{b+1} b_0) & \dots & \text{Tr}(y^{b+1} \frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k}) & \dots & \text{Tr}(y^{n-1+b+1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(y^{n-1} b_0) & \dots & \text{Tr}(y^{n-1} \frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k}) & \dots & \text{Tr}(y^{2n-2}) \\ \text{Tr}(b_0^2) & \dots & \text{Tr}(b_0^2) & \dots & \text{Tr}(b_0 y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} b_0) & \dots & \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} b_0) & \dots & \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(y^{n-1} b_0) & \dots & \text{Tr}(y^{n-1} b_0) & \dots & \text{Tr}(y^{2n-2}) \end{pmatrix} = \\ & = \frac{a_0}{k} \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(b_0^2) & \dots & \text{Tr}(b_0^2) & \dots & \text{Tr}(b_0 y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} b_0) & \dots & \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} b_0) & \dots & \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(y^{n-1} b_0) & \dots & \text{Tr}(y^{n-1} b_0) & \dots & \text{Tr}(y^{2n-2}) \end{pmatrix} + \\ & \dots + \frac{a_{d-1}}{k} \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(b_0^2) & \dots & \text{Tr}(b_0 b_{d-1}) & \dots & \text{Tr}(b_0 y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} b_0) & \dots & \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} b_{d-1}) & \dots & \text{Tr}(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_d b_d}{k} y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(y^{n-1} b_0) & \dots & \text{Tr}(y^{n-1} b_{d-1}) & \dots & \text{Tr}(y^{2n-2}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{k} \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(b_0^2) & \cdots & \text{Tr}(b_0 b_d) & \cdots & \text{Tr}(b_0 y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}\left(\frac{a_0 b_0 + \cdots + a_d b_d}{k} b_0\right) & \cdots & \text{Tr}\left(\frac{a_0 b_0 + \cdots + a_d b_d}{k} b_d\right) & \cdots & \text{Tr}\left(\frac{a_0 b_0 + \cdots + a_d b_d}{k} y^{n-1}\right) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(y^{n-1} b_0) & \cdots & \text{Tr}(y^{n-1} b_d) & \cdots & \text{Tr}(y^{2n-2}) \end{pmatrix} \\
& = \frac{1}{k^2} \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(b_0^2) & \cdots & \text{Tr}(b_0 b_d) & \cdots & \text{Tr}(b_0 y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(b_d b_0) & \cdots & \text{Tr}(b_d b_d) & \cdots & \text{Tr}(b_d y^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \text{Tr}(y^{n-1} b_0) & \cdots & \text{Tr}(y^{n-1} b_d) & \cdots & \text{Tr}(y^{2n-2}) \end{pmatrix} = \\
& = \frac{1}{k^2} \text{disc}(b_0, \dots, b_d, y^{b+1}, \dots, y^{n-1})
\end{aligned}$$

Da  $\text{disc}(b_0, \dots, b_d, y^{b+1}, \dots, y^{n-1}) \in L[x]$ ,  $\text{disc}(b_0, \dots, b_{d-1}, a, y^{b+1}, \dots, y^{n-1}) \in L[x]$  und  $k \in K[x]$  gilt

$$\deg(\text{disc}(b_0, \dots, b_{d-1}, a, y^{b+1}, \dots, y^{n-1})) = \deg(\text{disc}(b_0, \dots, b_d, y^{b+1}, \dots, y^{n-1})) - 2 \deg(k)$$

also wird der  $\deg(\text{disc}(b_0, \dots, b_d, y^{b+1}, \dots, y^{n-1}))$  beim Ersetzen von  $b_d$  durch  $a$  echt kleiner, da  $\deg(k) > 0$  (denn wäre  $k \in K$  dann wäre  $a \in \sum_{i=0}^d L[x] b_i$ ).  
Damit muß der Algorithmus abbrechen.

### Beweis, daß $a$ wie gefordert gewählt werden kann

1. Sei  $V(b_d) \neq \emptyset$  und sei  $a \in V(b_d)$ . Es gelte, daß

$$\sum_{i=0}^{d-1} L[x] b_i = \left\{ \tilde{a} \in \overline{L[x]} \mid \deg(\tilde{a}) \leq d-1 \right\}$$

also insbesondere  $\deg(a) = d$ . Da  $\deg(b_i) = i$  für  $i = 0, \dots, d$ , ist  $\{b_0, \dots, b_d\}$  eine  $L(x)$ -Vektorraumbasis von

$$\{\tilde{a} \in L(x, y) \mid \deg(\tilde{a}) \leq d\}$$

also gibt es  $a_0, \dots, a_d, k' \in L[x]$  mit  $\deg(k') > 0$  und  $k'$  teilt nicht alle  $a_0, \dots, a_d$ , sodaß  $\frac{a_0 b_0 + \cdots + a_d b_d}{k'} = a$  (sonst wäre  $a \in \sum_{i=0}^d L[x] b_i$ ). Wenn  $k'$  nicht irreduzibel in  $L[x]$  ist, ersetzt man  $a$  durch  $ah$  mit  $h \in L[x]$  und  $\frac{k'}{h}$  irreduzibel in  $L[x]$  und  $\deg\left(\frac{k'}{h}\right) > 0$ . Da  $L$  algebraisch abgeschlossen ist, kann man also annehmen, daß  $k' = x - \alpha$  mit  $\alpha \in L$ .

2. Da  $y^0, \dots, y^d \in \sum_{i=0}^d L[x] b_i$  gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} L[x] y^i \subset \sum_{i=0}^d L[x] b_i + \sum_{i=d+1}^{n-1} L[x] y^i$$

und damit  $\text{disc}(b_0, \dots, b_d, y^{d+1}, \dots, y^{n-1}) \mid \text{disc}(y^0, \dots, y^{n-1})$ . Ersetzt man nun  $b_d$  durch  $a$ , dann gilt

$$\text{disc}(b_0, \dots, b_d, y^{d+1}, \dots, y^{n-1}) = k'^2 \text{disc}(b_0, \dots, b_{d-1}, a, y^{b+1}, \dots, y^{n-1})$$

und damit  $(x - \alpha)^2 \mid \text{disc}(y^0, \dots, y^{n-1})$ . Da  $\text{disc}(y^0, \dots, y^{n-1}) = \text{res}_y \left( f, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \in K[x]$  ist also  $\alpha$  algebraisch über  $K$ , d.h.  $\alpha \in \overline{K}$ .

3. Es gilt  $cb_i + a \in \overline{L[x]} \forall c \in L[x], i = 1, \dots, d-1$ , denn  $\sum_{i=0}^d L[x] b_i \subset \overline{L[x]}$ . Außerdem  $\deg(cb_i + a) = d$  und  $cb_i + a \in V(b_d)$ , denn wäre  $cb_i + a \in \sum_{i=0}^d L[x] b_i$  wäre auch  $a \in \sum_{i=0}^d L[x] b_i$ , da  $cb_i \in \sum_{i=0}^d L[x] b_i$ . Es gilt

$$cb_i + a = \frac{a_0 b_0 + \dots + a_{i-1} b_{i-1} + a_{i+1} b_{i+1} + \dots + 1 b_d + (a_i + (x - \alpha) c) b_i}{(x - \alpha)} \in \overline{L[x]}$$

Es gibt ein  $c \in L[x]$ , sodaß  $a_i + (x - \alpha) c \in L$ , also kann man annehmen, daß  $a_0, \dots, a_d \in L$  sind, und nach Multiplikation mit  $\frac{1}{a_d}$ , daß  $a_d = 1$ , d.h.

$$\exists a \in V(b_d) \text{ und } a_0, \dots, a_{d-1} \in L \text{ und } \alpha \in \overline{K} : a = \frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x - \alpha)}$$

4. Nun zeigt man, daß es für alle  $\alpha \in \overline{K}$  höchstens eine Sequenz  $a_0, \dots, a_{d-1} \in L$  gibt, sodaß  $\frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x - \alpha)} \in \overline{L[x]}$ .

Sei dazu  $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{d-1} \in L$  eine andere Sequenz mit  $\frac{\tilde{a}_0 b_0 + \dots + \tilde{a}_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x - \alpha)} \in \overline{L[x]}$ . Dann gilt  $h := \frac{(a_0 - \tilde{a}_0) b_0 + \dots + (a_{d-1} - \tilde{a}_{d-1}) b_{d-1}}{(x - \alpha)} \in \overline{L[x]}$  und  $\deg(h) \leq d - 1$  und  $h \notin \sum_{i=0}^{d-1} L[x] b_i$ , ein Widerspruch zu

$$\sum_{i=0}^{d-1} L[x] b_i = \left\{ a \in \overline{L[x]} \mid \deg(a) \leq d - 1 \right\}$$

5. Sei  $\alpha \in \overline{K}$  und seien  $a_0, \dots, a_{d-1} \in L$  die eindeutig bestimmten Elemente, sodaß  $\frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x - \alpha)} \in \overline{L[x]}$ . Man zeigt, daß für die eindeutig bestimmten  $a_0, \dots, a_{d-1} \in L$  gilt, daß  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K(\alpha)$ . Angenommen  $a_i$  ist transzendent über  $K(\alpha, a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{d-1})$ , dann würde für ein beliebiges Element  $c \in K$  gelten, daß  $\frac{a_0 b_0 + \dots + c b_i + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x - \alpha)} \in \overline{L[x]}$ , ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Sequenz  $a_0, \dots, a_{d-1}$ . Damit sind  $a_0, \dots, a_{d-1}$  algebraisch über  $K(\alpha)$ . Dann muß aber schon gelten, daß  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K(\alpha)$ , denn wäre  $K(\alpha) \subsetneq K(\alpha)(a_0, \dots, a_{d-1})$  dann gäbe es, da diese Körpererweiterung algebraisch ist, eine weitere Folge  $(\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{d-1})$  mit  $K(\alpha)(a_0, \dots, a_{d-1}) = K(\alpha)(\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{d-1})$  für die gelten würde, daß  $\frac{\tilde{a}_0 b_0 + \dots + \tilde{a}_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x - \alpha)} \in \overline{L[x]}$ , also ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Sequenz  $a_0, \dots, a_{d-1}$ .

6. Sei  $p \in K[X]$  das Minimalpolynom von  $\alpha \in \overline{K}$ , also gilt  $(X - \alpha) \mid p$  in  $\overline{K}[X]$  und  $K(\alpha) \cong K[X]/(p)$ . Schreibe dazu  $g \in K(\alpha)$  als Polynom in  $\alpha$  von kleinerem Grad als  $p$  und ersetze  $\alpha$  durch  $X$ . Für  $i \in \{0, \dots, d\}$  sei also  $g_i \in K[X]$  mit  $\deg(g_i) \leq \deg(p)$  und  $a_i = g_i(\alpha)$  und schreibe  $g_i = m_{i0} + m_{i1}X + \dots + m_{il}X^l$  mit  $l := \deg(g_i)$  und  $m_{ij} \in K$ . Dann gilt

$$g_i(x) - a_i = g_i(x) - g_i(\alpha) = m_{i1}(x - \alpha) + \dots + m_{il}(x^l - \alpha^l) = (x - \alpha) h_i$$

mit einem  $h_i \in L[x]$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}\tilde{a} &:= \frac{g_0(x)b_0 + \dots + g_{d-1}(x)b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)} = \\ &= a + \frac{(x-\alpha)h_0b_0 + \dots + (x-\alpha)h_{d-1}b_{d-1}}{(x-\alpha)} = \\ &= a + h_0b_0 + \dots + h_{d-1}b_{d-1} \in \overline{L[x]} \text{ mit der Argumentation aus (3)}\end{aligned}$$

Weiterhin gilt  $\deg(\tilde{a}) = d$  und  $\tilde{a} \notin \sum_{i=0}^d L[x]b_i$  und damit  $\tilde{a} \in V$ . Damit hat man also:

$$\exists a \in V(b_d) \text{ und } a_0, \dots, a_{d-1} \in K[x] \text{ und } \alpha \in \overline{K} : a = \frac{a_0b_0 + \dots + a_{d-1}b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)}$$

7. Zeige nun:

$$\exists a \in V(b_d) \text{ und } a_0, \dots, a_{d-1}, p \in K[x] : a = \frac{a_0b_0 + \dots + a_{d-1}b_{d-1} + b_d}{p}$$

Sei dazu  $a = \frac{a_0b_0 + \dots + a_{d-1}b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)} \in V(b_d) \subset \overline{L[x]}$  mit  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K[x]$  und  $\alpha \in \overline{K}$ . Sei  $P$  eine Stelle von  $L(x, y)$  gemäß Definition 1 ( $L(x, y)$  ist ein algebraischer Funktionenkörper in 1 Variable), also ein maximales Ideal eines diskreten Bewertungsrings  $O_P = \{z \in L(x, y) \mid z^{-1} \notin P\}$  und sei  $v_P : F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  die zugehörige diskrete Bewertung. Gemäß Definition 5 ist  $L[x]$  ein Unterring von  $L(x, y)$ . Nach Satz 7 gilt also mit

$$\begin{aligned}S(L[x]) &= \{P \mid P \text{ Stelle von } L(x, y) \text{ mit } L[x] \subset O_P\} = \\ &= \{P \mid P \text{ Stelle von } L(x, y) \text{ mit } x \in O_P\}\end{aligned}$$

$\overline{L[x]} = \overline{L[x]}^{L(x, y)} = O_{S(L[x])} = \{a \in L(x, y) \mid v_P(a) \geq 0 \forall P \in S(L[x])\}$   
also gilt

$$\begin{aligned}a \in \overline{L[x]} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_P(a) \geq 0 \forall P \in S(L[x]) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_P(a_0b_0 + \dots + a_{d-1}b_{d-1} + b_d) \geq v_P(x - \alpha) \forall P \in S(L[x])\end{aligned}$$

Sei wieder  $p \in K[X]$  das Minimalpolynom von  $\alpha$  über  $K$  und seien  $\alpha_i$  die zu  $\alpha$  konjugierten Elemente von  $L$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}v_P(a_0b_0 + \dots + a_{d-1}b_{d-1} + b_d) &\geq v_P(x - \alpha_i) \forall P \in S(L[x]) \forall i \text{ und damit} \\ v_P(a_0b_0 + \dots + a_{d-1}b_{d-1} + b_d) &\geq v_P(p) \forall P \in S(L[x])\end{aligned}$$

denn wenn für ein  $P \in S(L[x])$  gilt  $v_P(x - \alpha_i) > 0$ , dann gilt  $v_P(x - \alpha_j) = 0 \forall j \neq i$ . Damit gilt

$$\tilde{a} := \frac{a_0b_0 + \dots + a_{d-1}b_{d-1} + b_d}{p} \in \overline{L[x]}$$

und  $\tilde{a} \in K(x, y)$ . Weiterhin gilt  $\tilde{a} \in V(b_d)$ , denn  $\deg(\tilde{a}) = d$  und  $\tilde{a} \notin \sum_{i=0}^d L[x]b_i$ .

8. Insgesamt wurde also gezeigt:

Falls  $V(b_d) \neq \emptyset \exists a \in V(b_d)$  und  $a_0, \dots, a_{d-1}, p \in K[x]$ ,  $p$  irreduzibel, sodaß

$$a = \frac{a_0b_0 + \dots + a_{d-1}b_{d-1} + b_d}{p}$$

### Verfahren zur Bestimmung von $a_0, \dots, a_{d-1}, p$

1. Aus dem vorangegangenen Abschnitt haben wir eine Methode, um aus einem  $a = \frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)} \in V(b_d)$  mit  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K(\alpha)$  und  $\alpha \in L$  ein  $\tilde{a} := \frac{\tilde{a}_0 b_0 + \dots + \tilde{a}_{d-1} b_{d-1} + b_d}{p} \in V(b_d)$  mit  $\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{d-1}, p \in K[x]$ ,  $p$  irreduzibel, zu konstruieren. Bei vorgegebenem  $\alpha \in L$ , reicht es also  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K(\alpha)$  zu konstruieren mit  $a = \frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)} \in V(b_d)$ , wobei wir aus dem vorangegangenen Abschnitt wissen, daß solche  $a_0, \dots, a_{d-1}$  existieren, wenn  $V(b_d) \neq \emptyset$ .

2. Eine **Puiseuxreihe** um  $\alpha \in L$  ist ein Element des algebraisch abgeschlossenen Körpers

$$L(x-\alpha)^* := \bigcup_{t=1}^{\infty} L\left(\left((x-\alpha)^{1/t}\right)\right)$$

wobei eine Relation zwischen den Symbolen  $(x-\alpha)^{1/t}$  definiert ist durch  $(x-\alpha)^{1/1} = (x-\alpha)$  und  $\left(\left((x-\alpha)^{1/(rn)}\right)^r\right)^n = (x-\alpha)^{1/n}$  und  $(x-\alpha)^{m/n} = \left(\left((x-\alpha)^{1/n}\right)^m\right)$ .  $L(x-\alpha)^*$  ist algebraisch abgeschlossen (Beweis: [42], Ch. IV. Theorem 3.1), (Puiseuxreihen lassen sich mit dem Newtonpolygon berechnen ([42], Ch. IV.3.2).

Da  $L(x) \subset L(x-\alpha)^*$  gibt es  $p_1, \dots, p_n \in L(x-\alpha)^*$ , sodaß  $f = \prod_{i=1}^n (y-p_i)$ , und  $p_1, \dots, p_n$  paarweise verschieden sind (Beweis: [42], Ch. IV, Theorem 3.2).

Betrachte die Abbildung  $\nu : L(x-\alpha)^* \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , gegeben durch folgende Abbildungsvorschrift: Für  $q \in L(x-\alpha)^* \setminus \{0\}$  mit  $q \in L\left(\left((x-\alpha)^{1/t}\right)\right)$

gibt es genau ein  $\tilde{q} \in L((T))$  mit  $q = \tilde{q} \left(\left((x-\alpha)^{1/t}\right)\right)$  setze  $\nu(q) := \frac{1}{t} \nu(\tilde{q})$ .

Die Abbildung  $\iota_i : L(x, y) \rightarrow L(x-\alpha)^*$ ,  $b \mapsto b(x, p_i)$  ist injektiv, denn aus  $g(x, p_i) = 0$  mit  $g \in L(x)[y]$  folgt  $f \mid g$ . Definiere die Abbildung  $v_i : L(x, y) \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  durch  $v_i := \nu \circ \iota_i$ .

3. Sei  $P$  eine Stelle von  $L(x, y)$ .  $P$  liegt über  $\alpha$  : $\Leftrightarrow v_P(x-\alpha) > 0$ .

Liegt eine Stelle  $P$  von  $L(x, y)$  über  $\alpha$ , dann gibt es genau  $t := v_P(x-\alpha)$  Puiseuxentwicklungen  $p_{i_1}, \dots, p_{i_t} \in L\left(\left((x-\alpha)^{1/t}\right)\right)$  mit  $v_{i_j}(a) \geq 0 \Leftrightarrow v_P(a) \geq 0 \forall a \in L(x, y)$ . Für diese gilt  $v_P(a) = t v_{i_j}(a)$  für  $j = 1, \dots, t$ .

Seien  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K(\alpha)$  gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)} &\in \overline{L[x]} \Leftrightarrow \\ v_P\left(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{x-\alpha}\right) &\geq 0 \forall P \in S(L[x]) \Leftrightarrow \\ v_i\left(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{x-\alpha}\right) &\geq 0 \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

denn  $v_P\left(\frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{x-\alpha}\right) = v_P(a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d) - v_P(x-\alpha) \geq 0$  falls  $P$  nicht über  $\alpha$  liegt, denn dann ist  $v_P(x-\alpha) = 0$  und

$$v_P(a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d) \geq \min\{v_P(a_0 b_0), \dots, v_P(a_{d-1} b_{d-1}), v_P(b_d)\} \geq 0$$

denn weil  $b_0, \dots, b_d \in \overline{L[x]}$  gilt  $v_P(b_j) \geq 0$  für  $j = 0, \dots, d$  und, weil  $a_0, \dots, a_{d-1} \in L[x]$ , gilt  $v_P(a_j) \geq 0$  für  $j = 0, \dots, d$ .

4. Betrachte nun ein  $\frac{\bar{a}_0 b_0 + \dots + \bar{a}_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)}$  mit unbestimmten Koeffizienten  $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{d-1}$ , für die Lösungen  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K(\alpha)$  gesucht sind. Seien gemäß 2.  $p_1, \dots, p_n$  die Puiseuxreihen von  $f$  in  $\alpha$ . Nach 3. gilt

$$\frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)} \in \overline{L[x]} \Leftrightarrow v\left(\frac{a_0 b_0(x, p_i) + \dots + a_{d-1} b_{d-1}(x, p_i) + b_d(x, p_i)}{x-\alpha}\right) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Letzteres gilt genau dann, wenn in der Darstellung

$$\frac{\bar{a}_0 b_0(x, p_i) + \dots + \bar{a}_{d-1} b_{d-1}(x, p_i) + b_d(x, p_i)}{x-\alpha} = \sum_{j=-m}^{\infty} c_j(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{d-1})(x-\alpha)^{j/t}$$

mit  $c_{-m}(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{d-1}) \neq 0_{K[\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{d-1}]}$

gilt  $c_j(a_0, \dots, a_{d-1}) = 0$  für  $j = -m, \dots, -1$  bei geeigneter Wahl von  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K(\alpha)$ . Da  $c_j(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{d-1})$  linear von  $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{d-1}$  abhängt, bekommt man ein lineares Gleichungssystem für  $a_0, \dots, a_{d-1}$ , das nach dem letzten Abschnitt, falls es lösbar ist, genau eine Lösung in  $K(\alpha)$  hat. Nun muß noch bestimmt werden, bis zu welcher Ordnung in  $(x-\alpha)^{1/t}$  die Puiseuxreihen berechnet werden müssen, um das lineare Gleichungssystem eindeutig zu bestimmen:

5. Seien gemäß 2.  $p_1, \dots, p_n$  die Puiseuxreihen von  $f$  in  $\alpha$ .  $r_1, \dots, r_n \in L(x-\alpha)^*$  sollen durch Abschneiden von  $p_1, \dots, p_n$  entstehen und außerdem paarweise verschieden sein (geht, da  $p_1, \dots, p_n$  paarweise verschieden). Man will nun in 4. statt  $p_1, \dots, p_n$  die  $r_1, \dots, r_n$  einsetzen. Man muß dazu  $N_1, \dots, N_n \in \mathbb{Q}$  bestimmen, die die Ordnungen angeben, bis zu denen  $p_1, \dots, p_n$  und  $r_1, \dots, r_n$  übereinstimmen müssen, damit 4. funktioniert, d.h.  $v(r_i - p_i) \geq N_i$ . Man kann sicherstellen, daß 4. das richtige Ergebnis liefert, wenn gilt:

$$\forall G \in L[x, y] \text{ mit } \deg_y(G) < n \text{ gilt:} \quad (2)$$

$$\forall M \in \mathbb{N} :$$

$$v(G(x, r_i(x))) \geq M \quad \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow v(G(x, p_i(x))) \geq M \quad \forall i = 1, \dots, n$$

denn man will für ein  $a \in L(x, y)$  testen, ob  $v(a(x, p_i(x))) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ . Schreibe dazu  $a = \frac{G}{H}$  mit  $G \in L[x, y]$  und  $H \in L[x]$  und  $\deg_y(G) < n$  und sei  $H = (x-\alpha)^M D$  mit  $D \in L[x]$ ,  $M \in \mathbb{N}_0$  und  $D(\alpha) \neq 0$ . Da  $v_i(a) = v_i(G) - v_i(H)$  und  $v_i(D) = 0$ , also  $v_i(H) = v_i((x-\alpha)^M)$  gilt

$$v_i(a) = v_i\left(\frac{G}{(x-\alpha)^M}\right)$$

also gilt  $v(a(x, p_i(x))) \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow v(G(x, p_i(x))) \geq M \quad \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow v(G(x, r_i(x))) \geq M \quad \forall i = 1, \dots, n$   
wenn (2) gilt

Bestimme nun die  $N_1, \dots, N_n \in \mathbb{Q}$ , sodaß (2) gilt:

Sei dazu  $M \in \mathbb{N}$  und  $G \in L[x, y]$  mit  $\deg_y(G) < n$ . Gelte  $v(G(x, r_i(x))) \geq M \forall i = 1, \dots, n$ . Bestimme  $N_1, \dots, N_n \in \mathbb{Q}$ , sodaß  $v(G(x, p_i(x))) \geq M \forall i = 1, \dots, n$ : Es zeigt sich, daß die  $N_i$  unabhängig von  $M$  gewählt werden können:

Da  $\deg_y(G) < n$  ist das Polynom  $G$  durch  $G(x, r_1(x)), \dots, G(x, r_n(x))$  eindeutig bestimmt, denn es gilt mit

$$Ind_i(x, y) := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{y - r_j}{r_i - r_j} \right), \text{ daß}$$

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^n G(x, r_i(x)) Ind_i(x, y)$$

Hat man nun  $v(G(x, r_i(x))) \geq M \forall i = 1, \dots, n$ , dann gilt wegen

$v(G(x, r_i(x)) Ind_i(x, p_j(x))) = v(G(x, r_i(x))) + v(Ind_i(x, p_j(x)))$  daß

$$v(G(x, p_j(x))) = v\left(\sum_{i=1}^n G(x, r_i(x)) Ind_i(x, p_j(x))\right) \geq M$$

falls  $v(Ind_i(x, p_j(x))) = v\left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{p_j - r_j}{r_i - r_j}\right)\right) \geq 0 \forall i$  unabhängig von  $M$

Zeige: dies ist erfüllt für

$$\begin{aligned} N_i &> \max\{v(p_i - p_k) \mid k = 1, \dots, n, k \neq i\} + \\ &+ \max\left\{\sum_{k=1, k \neq j}^n v(p_j - p_k) \mid j = 1, \dots, n\right\} - \\ &- \sum_{k=1, k \neq i}^n v(p_i - p_k) \\ &= \max\{v(p_i - p_k) \mid k = 1, \dots, n, k \neq i\} + \max\{Int_j \mid j = 1, \dots, n\} - Int_i \end{aligned}$$

mit  $Int_i := \sum_{k=1, k \neq i}^n v(p_i - p_k)$ .

Seien die  $N_i$  nun gemäß dieser Gleichung gewählt. Insbesondere gilt dann, da  $\max\{Int_j \mid j = 1, \dots, n\} - Int_i \geq 0$ , daß

$$v(r_j - p_j) \geq N_j > \max\{v(p_j - p_k) \mid k = 1, \dots, n, k \neq j\}$$

d.h.  $r_j$  ist näher an  $p_j$  als jedes andere  $p_k$  bezüglich der Metrik  $(\frac{1}{2})^v$  auf  $L(x - \alpha)^*$ . Damit folgt  $v(r_i - p_k) < v(p_i - r_i) \forall i \neq k, i, k = 1, \dots, n$  und  $p_i$  ist als die Puiseuxentwicklung unter  $p_1, \dots, p_n$ , die am nächsten zu  $r_i$  liegt, eindeutig bestimmt. Für  $i \neq j$  gilt

$$v(p_i - p_j) = v(r_i - r_j) = v(r_i - p_j)$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned}
& v \left( \prod_{k=1, k \neq i}^n \left( \frac{p_j - r_k}{r_i - r_k} \right) \right) \\
&= v \left( \prod_{k=1, k \neq i}^n (p_j - r_k) \right) - \sum_{k=1, k \neq i}^n v(r_i - r_k) = \\
&= v(p_j - r_j) + \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^n v(p_j - r_k) - \sum_{k=1, k \neq i}^n v(r_i - r_k) = \\
&= v(p_j - r_j) + \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^n v(p_j - p_k) - \sum_{k=1, k \neq i}^n v(p_i - p_k) = \\
&= v(p_j - r_j) + Int_j - v(p_j - p_i) - Int_i \geq \\
&\geq N_j + Int_j - v(p_j - p_i) - Int_i \\
&> \max \{v(p_j - p_k) \mid k = 1, \dots, n, k \neq j\} \\
&+ \max \{Int_k \mid k = 1, \dots, n\} - Int_j + Int_j - v(p_j - p_i) - Int_i \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\forall i, j = 1, \dots, n, i \neq j$$

und für  $i = j$ :

$$v \left( \prod_{k=1, k \neq j}^n \left( \frac{p_j - r_k}{r_j - r_k} \right) \right) = \sum_{k=1, k \neq j}^n \underbrace{(v(p_j - r_k) - v(r_j - r_k))}_0 = 0 \text{ also}$$

$$v \left( \prod_{k=1, k \neq i}^n \left( \frac{p_j - r_k}{r_i - r_k} \right) \right) \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ also}$$

$$v(Ind_i(x, p_j(x))) = v \left( \prod_{k=1, k \neq i}^n \left( \frac{p_j - r_k}{r_i - r_k} \right) \right) \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Diese Argumentation liefert auch, daß aus  $v(G(x, p_i(x))) \geq M \quad \forall i = 1, \dots, n$  folgt, daß  $(G(x, r_i(x))) \geq M \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

6. Um  $\alpha$  zu erhalten betrachtet man

$$\left\{ p \in K[x] \mid p \text{ irreduzibel, normiert mit } p^2 \mid res_y \left( f, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right\}$$

Man nimmt für  $\alpha$  eine Nullstelle von einem solchen  $p$ , bestimmt für dieses  $\alpha$  die (falls sie existiert) eindeutig bestimmte Sequenz  $a_0, \dots, a_{d-1} \in K(\alpha)$  mit  $\frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{(x-\alpha)} \in V(b_d)$ . Falls es keine solche Sequenz gibt, wählt man ein neues  $p$ . Wenn es eine solche Sequenz gibt, ersetzt man  $\alpha$  durch  $x$  in  $a_0, \dots, a_{d-1}$  und ersetzt  $b_d$  durch  $\frac{a_0 b_0 + \dots + a_{d-1} b_{d-1} + b_d}{p}$ .

Damit ist der Algorithmus vollständig.

**Bemerkung 36** Verwende die Notation aus Abschnitt 9.2.1(2.). Wendet man den Ganzheitsbasisalgorithmus auf eine solche ebene Kurve  $C$  vom Grad  $n$  an, um eine Ganzheitsbasis von  $\overline{L[C]}$  über  $L[C] = L[x, y]$  zu berechnen, bekommt man  $b_0, \dots, b_{n-1} \in L(C)$ , wobei für  $i = 0, \dots, n-1$  der Zähler von  $b_i$  ein normiertes Polynom in  $y$  vom Grad  $i$  und Koeffizienten in  $k[x]$  ist, und der Nenner ein Element von  $k[x]$  ist. Sei  $\alpha_i$  der Grad des Nenners von  $b_i$  in  $x$ . Dann gilt für die projektive Kurve  $C^*$  (siehe [23]):

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = \delta(C^*)$$

also

$$p(C^*) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta(C^*) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i$$

## 10 Standardzerlegung der Singularitäten

### 10.1 Der Umgebungsgraph einer ebenen Kurve

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(k) = 0$ . Sei  $C = V(F)$ ,  $F \in k[X, Y, Z] \setminus k$  homogen,  $n := \deg(F)$ , eine irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad  $n$ . Gemäß Abschnitt 8(10) sei

$$C = C_0 \xrightarrow{T_1} C_1 \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_m} C_m \quad (*)$$

eine endliche Sequenz von allgemeinen quadratischen Transformationen  $T_1, T_2, \dots, T_m$  und irreduziblen Kurven  $C_0, C_1, \dots, C_m$ , sodaß  $C_{i+1}$  die quadratisch transformierte von  $C_i$  sei für  $i = 0, \dots, m-1$  und  $C_m$  nur noch gewöhnliche Mehrfachpunkte hat. Dabei ist eine allgemeine quadratische Transformation  $T$  eine Komposition einer Translation  $t$ , die einen gegebenen Punkt in einen Fundamentalpunkt rückt, mit einer quadratischen Transformation  $Q$ . Man sagt  $T$  ist zentriert in  $P$  genau dann, wenn die Translation  $t$  den Punkt  $P$  in einen Fundamentalpunkt von  $Q$  rückt.

Sei  $P \in C$  ein singulärer Punkt. Sei  $T_i$  zentriert in  $P$ , seien jedoch  $T_1, T_2, \dots, T_{i-1}$  nicht zentriert in  $P$ . Da  $T_i$  eine Translation beinhaltet kann man annehmen, daß  $P = (0 : 0 : 1)$ . Die erste Umgebung von  $P$  sei die Menge

$$(V(Z) \cap C_i) \setminus \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)\}$$

der nichtfundamentalen Schnittpunkte von  $V(Z)$  mit  $C_i$ . Die zweite Umgebung von  $P$  ist die Vereinigung aller ersten Umgebungen der Punkte der ersten Umgebung von  $P$ . Die Elemente dieser Menge müssen nicht alle auf der selben Kurve liegen. Die  **$i$ -te Umgebung von  $P$**  ist die Vereinigung aller ersten Umgebungen der Punkte der  $(i-1)$ -ten Umgebung von  $P$ . Sei  $P$  ein singulärer Punkt von  $C$ . Der **Umgebungsbaum von  $P$**  in bezug auf die Sequenz  $(*)$  ist die Vereinigung  $B$  der Mengen der singulären Punkte aus den  $i$ -ten Umgebungen von  $P$  zusammen mit einer Relation  $\rho = (B, B, U)$  mit  $U = \{(P, P') \in B \times B \mid P \text{ liegt in der ersten Umgebung von } P'\}$ . Der **Umgebungsgraph von  $C$**  in bezug auf die Sequenz  $(*)$  ist die Menge aller Umgebungsäume in bezug auf die Sequenz  $(*)$  von singulären Punkten von  $C$ .

Sei  $P \in C$ , OE  $P = (0 : 0 : 1)$ ,  $P' := (0 : 1 : 0)$ ,  $P'' := (1 : 0 : 0)$  und sei  $[Q] : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ ,  $Q(x : y : z) := (yz : xz : xy)$  eine quadratische Transformation, die in  $P$  zentriert ist. Sei  $m_P(C) = r$ ,  $m_{P'}(C) = r'$ ,  $m_{P''}(C) = r''$  und  $F(X, Y, Z) = F_r(X, Y)Z^{n-r} + F_{r+1}(X, Y)Z^{n-r-1} + \dots + F_n(X, Y)$  mit  $F_i \in k[X, Y]$  homogen mit  $\deg(F_i) = i$ . Die quadratisch transformierte von  $F$  ist dann  $F'(X, Y, Z) = \sum_{i=0}^{n-r} F_{r+i}(Y, X)X^{n-r-r''-i}Y^{n-r-r'-i}Z^i$ , also  $F'(X, Y, 0) = F_r(Y, X)X^{n-r-r''}Y^{n-r-r'}$ . Die nichtfundamentalen Schnittpunkte von  $V(Z)$  mit  $C_i$  sind also gegeben durch  $\{(x : y : 0) \mid F_r(x, y) = 0\}$ . Schreibt man  $F_r(X, Y) = (a_1X - b_1Y)^{r_1} \cdot \dots \cdot (a_sX - b_sY)^{r_s}$ , dann ist die erste Umgebung von  $P$  in bezug auf  $Q$  die Menge  $\{(a_i : b_i : 0) \mid i = 1, \dots, s\}$ . Insbesondere gilt:

Ist  $P \in C$  nichtsingulär, dann enthält die erste Umgebung von  $P$  in bezug auf  $Q$  genau einen Punkt  $\tilde{P}$  und  $m_{\tilde{P}}(V(F')) = 1$ . Ist  $P \in C$  ein gewöhnlicher Mehrfachpunkt, dann enthält die erste Umgebung von  $P$  in bezug auf  $Q$  genau  $r = m_P(C)$  Punkte  $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_r$  mit  $m_{\tilde{P}_r}(V(F')) = 1$ . Damit bricht der Umgebungsgraph in  $P$  ab, ist also endlich.

Betrachte nun wieder die Sequenz  $(*)$ , sei  $n_i$  der Grad von  $C_i = V(F_i)$ , sei  $S_i$  die Menge der Singularitäten von  $C_i$  und  $N_i$  der Umgebungsgraph von  $C_i$ . Für  $P \in C_i$  sei  $r_P := m_P(C_i)$ . Es gilt dann:

**Satz 37** *Es gilt:*

1.  $C$  ist rational genau dann, wenn  $(n_m - 1)(n_m - 2) = \sum_{P \in S_m} r_P(r_P - 1)$ .

2. Für alle  $i = 0, \dots, m - 1$  gilt:

$$(n_i - 1)(n_i - 2) - \sum_{P \in N_i} r_P(r_P - 1) = (n_{i+1} - 1)(n_{i+1} - 2) - \sum_{P \in N_{i+1}} r_P(r_P - 1)$$

3.  $C$  ist rational genau dann, wenn  $(n - 1)(n - 2) = \sum_{P \in N_0} r_P(r_P - 1)$

**Beweis.**

1. Da eine allgemeine quadratische Transformation eine birationale Transformation ist, ist  $C_m$  rational genau dann, wenn  $C$  rational ist.  $C_m$  ist rational genau dann, wenn  $(n_m - 1)(n_m - 2) = \sum_{P \in S_m} r_P(r_P - 1)$ , denn

$C_m$  hat nur gewöhnliche Singularitäten.

2. Man kann  $S_i$  um beliebig viele nichtsinguläre Punkte erweitern, ohne die Summe  $\sum_{P \in S_i} r_P(r_P - 1)$  zu verändern. Deshalb und da eine allgemeine quadratische Transformation eine Translation beinhaltet, kann man annehmen, daß  $S_i = \{P_1, \dots, P_s\}$  mit  $P_1 = (0 : 0 : 1)$ ,  $P_2 = (0 : 1 : 0)$ ,  $P_3 = (1 : 0 : 0)$ . Damit können wir zu  $S_{i+1}$  die singulären Punkte der ersten Umgebungen von  $P_1, P_2, P_3$ , außerdem  $T_{i+1}(\{P_4, \dots, P_s\})$  und wiederum  $Q_1 = (0 : 0 : 1)$ ,  $Q_2 := (0 : 1 : 0)$ ,  $Q_3 = (1 : 0 : 0)$  zählen. Letztere sind gewöhnliche Mehrfachpunkte oder nichtsingulär, aber die Hinzunahme von nichtsingulären Punkten ändert die Summe  $\sum_{P \in S_{i+1}} r_P(r_P - 1)$  nicht. Bei

einer quadratischen Transformation ändern sich die Multiplizitäten von  $\{P_4, \dots, P_s\}$  nicht, also

$$\sum_{j=4}^s r_{P_j}(r_{P_j} - 1) = \sum_{j=4}^s r_{T(P_j)}(r_{T(P_j)} - 1)$$

Es bleibt zu zeigen

$$(n_i - 1)(n_i - 2) - \sum_{j=1}^3 r_{P_j}(r_{P_j} - 1) = (n_{i+1} - 1)(n_{i+1} - 2) - \sum_{j=1}^3 r_{Q_j}(r_{Q_j} - 1)$$

Dies gilt da  $n_{i+1} = 2n_i - r_{P_1} - r_{P_2} - r_{P_3}$  und  $r_{Q_j} = n_i - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^3 r_{P_l}$  nach

Abschnitt 8(4.) und deshalb

$$\begin{aligned}
& (n_{i+1} - 1)(n_{i+1} - 2) - r_{Q_1}(r_{Q_1} - 1) - r_{Q_2}(r_{Q_2} - 1) - r_{Q_3}(r_{Q_3} - 1) \\
&= (2n_i - r_{P_1} - r_{P_2} - r_{P_3} - 1)(2n_i - r_{P_1} - r_{P_2} - r_{P_3} - 2) \\
&\quad - (n_i - r_{P_2} - r_{P_3})(n_i - r_{P_2} - r_{P_3} - 1) \\
&\quad - (n_i - r_{P_1} - r_{P_3})(n_i - r_{P_1} - r_{P_3} - 1) \\
&\quad - (n_i - r_{P_1} - r_{P_2})(n_i - r_{P_1} - r_{P_2} - 1) \\
&= 2 - 3n_i + n_i^2 - r_{P_1}^2 - r_{P_2}^2 - r_{P_3}^2 + r_{P_1} + r_{P_2} + r_{P_3} \\
&= (n_i - 1)(n_i - 2) - \sum_{j=1}^3 r_{P_j}(r_{P_j} - 1)
\end{aligned}$$

3. Folgt aus (1) und  $m$ -maliger Anwendung von (2).

■ Um damit das Geschlecht von  $C$  berechnen zu können, muß man folgende Problemstellungen mit einem Algorithmus lösen:

- Die Singularitäten der Kurve geeignet darstellen und deren Multiplizitäten berechnen.
- Entscheiden ob ein singulärer Punkt gewöhnlich ist oder nicht.
- Den Umgebungsgraph von  $C$  berechnen.

## 10.2 Algorithmische Realisierung

Sei  $k$  ein Körper mit  $\text{char}(k) = 0$ . Sei  $C^* = V(F^*)$  die Verschwindungsmenge über einem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von  $\bar{k}$ ,  $F^* \in k[X, Y, Z] \setminus k$  homogen,  $n := \deg(F^*)$ , eine irreduzible ebene projektive Kurve. Sei  $C = V(F)$  mit  $F := F(X, Y, 1)$ . Wir wollen nun die Singularitäten von  $C$  darstellen durch Polynome über  $k$ . (Dieses Verfahren wird in [38] angegeben und stammt ursprünglich aus [32]). Praktisch ist  $k = \mathbb{Q}$ .

### 10.2.1 Standardzerlegung der Menge der Singularitäten

**Satz 38** *Es gibt einen Koordinatenwechsel, sodaß  $F$  von der Form  $Y^n + a_{n-1}(X)Y^{n-1} + \dots + a_0(X)$  ist und gilt*

$$\begin{aligned}
& \left( \left( F(x_0, y_0) = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial X}(x_0, y_0) = 0 \right) \text{ und } \left( F(x_0, y_1) = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial X}(x_0, y_1) = 0 \right) \right) \\
& \quad \Rightarrow y_0 = y_1
\end{aligned}$$

und dieser Koordinatenwechsel kann mit einem Algorithmus durchgeführt werden.

*Beweis:* Es genügt eine Drehung des Koordinatensystems.

Damit ist durch Angabe der  $x$ -Koordinate einer Singularität, diese eindeutig festgelegt. Betrachte für  $i = 1, \dots, n-1$

$$\bar{B}_i := ggT \left( \text{Res}_y \left( F, \frac{\partial^i F}{\partial X^i} \right), \text{Res}_y \left( F, \frac{\partial^i F}{\partial X^{i-1} \partial Y} \right), \dots, \text{Res}_y \left( F, \frac{\partial^i F}{\partial Y^i} \right) \right) \in k[X]$$

und  $B_i := \frac{\bar{B}_i}{ggT(\bar{B}_i, \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial X^i})}$ .  $B_i$  hat also genau an den x-Koordinaten von Punkten von  $C$  einfache Nullstellen, an denen  $\frac{\partial^i F}{\partial X^i}, \frac{\partial^i F}{\partial X^{i-1} \partial Y}, \dots, \frac{\partial^i F}{\partial Y^i}$  verschwinden, und die zugehörigen y-Koordinaten sind nach der Wahl des Koordinatensystems eindeutig festgelegt.  $\bar{A}_i := \frac{\bar{B}_i}{B_{i+1}}$  hat also genau an den x-Koordinaten von Punkten von  $C$  einfache Nullstellen, an denen  $\frac{\partial^i F}{\partial X^i}, \frac{\partial^i F}{\partial X^{i-1} \partial Y}, \dots, \frac{\partial^i F}{\partial Y^i}$  verschwinden, nicht jedoch alle  $\frac{\partial^{i+1} F}{\partial X^{i+1}}, \frac{\partial^{i+1} F}{\partial X^i \partial Y}, \dots, \frac{\partial^{i+1} F}{\partial Y^{i+1}}$ . Berechne nun eine Gröbnerbasis des Ideals  $\langle F, \frac{\partial F}{\partial X}, \bar{A}_i \rangle$  mit Elimination von  $Y$ . Das Ideal muß, da die  $Y$ -Koordinaten nach der Wahl des Koordinatensystems eindeutig festgelegt sind, ein Polynom enthalten, das in  $Y$  linear ist, also die Form  $n_i(X)Y - m_i(X)$  hat. Man bekommt also eine Darstellung der Singularitäten von  $C$  als  $\bigcup_j \left\{ \left( a, \frac{m_j(a)}{n_j(a)} \right) \mid p_j(a) = 0 \right\}$  mit irreduziblen  $p_j \in k[T]$ . Man hat also eine Darstellung der Singularitäten der projektiven Kurve  $C^*$  mit  $z \neq 0$  als  $\bigcup_j \{ (an_j(a) : m_j(a) : n_j(a)) \mid p_j(a) = 0 \}$ . Durchführung desselben Prozesses in den anderen affinen Karten liefert schließlich eine Darstellung der Singularitäten der projektiven Kurve  $C^*$  als  $\bigcup_j \{ (m_j^0(a) : m_j^1(a) : m_j^2(a)) \mid A_j(a) = 0 \}$  mit  $A_j \in k[T]$  irreduzibel. Die Mengen  $\{ (m_i^0(a) : m_i^1(a) : m_i^2(a)) \mid A_i(a) = 0 \}$  heißen **Standardfamilien**, und alle Punkte einer solchen Standardfamilie sind singuläre Punkte von  $C^*$  der gleichen Multiplizität. Die Menge

$$\{ \{ (m_i^0(a) : m_i^1(a) : m_i^2(a)) \mid A_i(a) = 0 \} \mid i \}$$

heißt **Standardzerlegung** der Singularitäten von  $C^*$ .

Man kann auch zunächst die Zerlegung der Singularitäten gemäß Abschnitt 11.4 berechnen: Für die irreduzible ebene projektive Kurve  $C^*$  seien  $P_{i,j}$  mit  $i = 2, \dots, s$  und  $j = 1, \dots, s_i$  die Singularitäten, wobei  $P_{i,j}$  mit  $j = 1, \dots, s_i$  jeweils Multiplizität  $i$  habe. Zu diesen Mehrfachpunkten dürfen infinitesimal nahe Punkte zugeordnet sein. Damit erhält man mit der Notation aus 11.4 Radikalideale  $J_i = I(\{P_{i,j} \mid j = 1, \dots, s_i\}) = \sqrt{I_i}$  für  $i = 2, \dots, s$ . Die Punkte  $\{P_{i,j} \mid j = 1, \dots, s_i\}$  für festes  $i$  lassen sich nun beschreiben als

$$\{ (m_0(a_0, a_1) : m_1(a_0, a_1) : m_2(a_0, a_1)) \mid A_i(a_0, a_1) = 0 \}$$

mit homogenen Polynomen vom gleichen Grad  $m_0, m_1, m_2 \in k[a_0, a_1]$  und einem homogenen Polynom  $A_i \in k[a_0, a_1]$ . Wähle dazu zwei generische, homogene, lineare Polynome  $\Phi_0, \Phi_1 \in k[X, Y, Z]$ . Sei  $G_i := \langle a_0 \Phi_1 - a_1 \Phi_0 \rangle + J_i$ . Das Ideal  $(G_i : \langle \Phi_0, \Phi_1 \rangle^\infty)$  enthält dann ein  $A_i \in k[a_0, a_1]$  und lineare Gleichungen

in  $X, Y, Z$ . Schreibe diese linearen Gleichungen als  $M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$  mit einer

Matrix  $M$  mit Einträgen in  $k[a_0, a_1]$  und berechne  $\ker(M \otimes k[a_0, a_1] / \langle A_i \rangle)$ . Wähle  $m_0, m_1, m_2$  als Repräsentanten (aus  $k[a_0, a_1]$  alle homogen) der Einträge eines Kernvektors ( $\neq 0$ ). Man hat also eine rationale Kurve durch die Punkte von  $J_i$  gelegt. Schließlich zerlegt man  $A_i$  noch in irreduzible Polynome.

### 10.2.2 Test ob ein Mehrfachpunkt gewöhnlich ist oder nicht

Hat man eine Zerlegung der Singularitäten der projektiven Kurve  $C^*$  in der Form  $\bigcup_i \{ (m_i^0(x) : m_i^1(x) : m_i^2(x)) \mid A_i(x) = 0 \}$  mit irreduziblen  $A_i$ , dann enthält

jede Standardfamilie  $\{P_i(a) := (m_i^0(a) : m_i^1(a) : m_i^2(a)) \mid A_i(a) = 0\}$  nur Singularitäten derselben Multiplizität. Sei also  $i$  fest und  $r := m_{P_i(x)}(C^*)$  mit  $A_i(x) = 0$ . Da  $A_i$  irreduzibel ist, sind entweder alle  $\{P_i(a) \mid A_i(a) = 0\}$  gewöhnliche Mehrfachpunkte der Multiplizität  $r$  oder alle sind nicht-gewöhnliche Mehrfachpunkte. Ein Kriterium dafür erhält man wie folgt: Betrachte den generischen Repräsentanten  $P_i(T) = (m_i^0(T) : m_i^1(T) : m_i^2(T))$ . Durch einen Koordinatenwechsel kann man annehmen, daß  $P_i(T) = (0 : 0 : 1)$ . Die transformierte Kurve ist dann gegeben durch ein  $G \in k[T, X, Y, Z]$ . Sei  $B \in k[T, X, Y]$  der Koeffizient von  $Z^{n-r}$  in  $G$  und  $D = \text{Res}_X \left( B(T, X, 1), \frac{\partial B(T, X, 1)}{\partial X} \right) \in k[T]$  die Diskriminante von  $B(T, X, 1)$  in bezug auf  $X$ . Dann gilt: Alle Elemente von  $\{P_i(a) \mid A_i(a) = 0\}$  sind gewöhnliche Mehrfachpunkte von  $C^*$  genau dann, wenn  $D \neq 0 \pmod{A_i}$ .

### 10.2.3 Berechnung des Umgebungsgraphen

Man habe eine Zerlegung der Singularitäten der projektiven Kurve  $C^*$  in der Form  $\bigcup_i \{(m_i^0(x) : m_i^1(x) : m_i^2(x)) \mid A_i(x) = 0\}$ . Um den Umgebungsgraphen berechnen zu können, genügt es, eine Standardfamilie

$$\{(m_i^0(x) : m_i^1(x) : m_i^2(x)) \mid A_i(x) = 0\}$$

von nicht-gewöhnlichen Mehrfachpunkten der Multiplizität  $r$  zu betrachten und deren Umgebungsbaum zu berechnen, d.h. den Umgebungsbaum simultan für alle Elemente der Standardfamilie. Betrachte den generischen Repräsentanten  $P_i(T) = (m_i^0(T) : m_i^1(T) : m_i^2(T))$ . Durch einen Koordinatenwechsel kann man annehmen, daß  $P_i(T) = (0 : 0 : 1)$ , daß  $(0 : 1 : 0)$  und  $(1 : 0 : 0)$  nicht auf  $C^*$  liegen und keine exzeptionelle Gerade Tangente an  $C^*$  in  $P_i(T)$  ist. Die transformierte Kurve ist dann gegeben durch ein  $G \in k[T, X, Y, Z]$ . Sei  $B \in k[T, X, Y]$  der Koeffizient von  $Z^{n-r}$  in  $G$ . Sei  $B_1 := \frac{B(T, X, 1)}{ggT(B(T, X, 1), \frac{\partial B(T, X, 1)}{\partial X})} \in k[T, X]$ . Es gilt dann [38]: Die Punkte der ersten Umgebung von  $P_i(T)$  sind  $\{(b : 1 : 0) \mid B_1(T, b) = 0\}$  und die Punkte der ersten Umgebungen der Punkte der Standardfamilie sind

$$\{(b : 1 : 0) \mid B_1(a, b) = 0, A_i(a) = 0\}$$

In dieser Weise kann induktiv fortgefahren werden, indem man nun wieder mit Abschnitt 10.2.1 die Standardzerlegung von  $\{(b : 1 : 0) \mid B_1(a, b) = 0, A_i(a) = 0\}$  berechnet, indem man die quadratisch transformierte von  $C^*$  betrachtet. Wie eine ebene quadratische Transformation über  $k$  simultan für eine ganze Standardfamilie durchgeführt wird, ist in Abschnitt 10.3 beschrieben.

### 10.2.4 Berechnung des Geschlechts aus der Standardzerlegung der Singularitäten

Mit Satz 37 kann man das Geschlecht von  $C^*$  berechnen, indem man mittels quadratischer Transformationen eine birational äquivalente Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten berechnet und dann deren Standardzerlegung der Singularitäten betrachtet, oder indem man den Umgebungsgraphen von  $C^*$  berechnet.

### 10.3 Birationale Transformation auf eine Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten

Sei  $k$  ein Körper mit  $\text{char}(k) = 0$ . Sei  $C^* = V(F^*)$ ,  $F^* \in k[X_1, X_2, X_3] \setminus k$  homogen,  $n := \deg(F^*)$ , eine irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad  $n$  über einem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von  $\bar{k}$ . Man berechnet mit 10.2.1 die Standardzerlegung der Singularitäten von  $C^*$  und entscheidet für jede Standardfamilie mit 10.2.2, ob sie aus gewöhnlichen oder nicht-gewöhnlichen Mehrfachpunkten besteht. Wähle eine Standardfamilie  $M := \{(m^0(x) : m^1(x) : m^2(x)) \mid A(x) = 0\}$  von nicht-gewöhnlichen Mehrfachpunkten, falls es eine solche gibt. Betrachte nun folgende birationale Transformation  $\Phi : \mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  gegeben durch

$$\begin{aligned} (\Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3) &:= (X_1 S_{s-1} : X_2 S_{s-1} : S_s) \\ S_{s-1} &:= X_3 U_{s-2}(X_1, X_2) + U_{s-1}(X_1, X_2) \\ S_s &:= X_3 V_{s-1}(X_1, X_2) + V_s(X_1, X_2) \end{aligned}$$

mit  $U_{s-2}, U_{s-1}, V_{s-1}, V_s \in k[X_1, X_2]$  homogen mit  $\deg(U_{s-2}) = s-2$ ,  $\deg(U_{s-1}) = s-1$ ,  $\deg(V_{s-1}) = s-1$ ,  $\deg(V_s) = s$ , insbesondere also  $\deg(S_{s-1}) = s-1$  und  $\deg(S_s) = s$ . Dabei werden  $S_{s-1}$  und  $S_s$  so bestimmt, daß  $m_P(S_{s-1}) = 1$  und  $m_P(S_s) = 1$  für alle  $P \in M$ , wobei  $s$  so groß gewählt wird, daß dies möglich ist, und außerdem die restlichen Schnittpunkte von  $S_{s-1}$  und  $S_s$  von  $M$  getrennt liegen.  $X_1 S_{s-1}, X_2 S_{s-1}$  und  $S_s$  haben  $(0 : 0 : 1)$  als gemeinsamen  $(s-1)$ -fachen Punkt.  $M$  besteht aus  $l$  verschiedenen Punkten  $Q_1, \dots, Q_l$ . Dann kann man  $\Phi$  auffassen als eine Komposition von quadratischen Transformationen zentriert in  $Q_1, \dots, Q_l$  (jede birationale Transformation  $\mathbb{P}_k^2 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  ist ein Produkt von allgemeinen ebenen quadratischen Transformationen), die jeweils so gewählt werden können, daß die zu transformierende Kurve bezüglich  $Q_i$  in exzellenter Position ist. Dazu wählt man  $s$  groß genug und die Lage von  $(0 : 0 : 1)$  und  $S_{s-1}, S_s$  allgemein genug. Die transformierte Kurve hat wieder Koeffizienten in  $k$ . Die Umkehrtransformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (\Psi_1 : \Psi_2 : \Psi_3) &:= (Y_1 \Sigma_{s-1} : Y_2 \Sigma_{s-1} : \Sigma_s) \\ \Sigma_{s-1} &:= Y_3 U_{s-2}(Y_1, Y_2) - V_{s-1}(Y_1, Y_2) \\ \Sigma_s &:= -Y_3 U_{s-1}(Y_1, Y_2) + V_s(Y_1, Y_2) \end{aligned}$$

Dieser Prozess wird wie bei einzelnen quadratischen Transformationen iteriert.

## 11 Methoden zur Berechnung des adjungierten Ideals

### 11.1 Berechnung des adjungierten Ideals aus einer Ganzheitsbasis

#### 11.1.1 Bemerkungen zum Conductor

**Definition 39 (gebrochenes Ideal)** Sei  $R$  ein Integritätsring. Ein  $R$ -Untermodul  $a \subset \text{quot}(R)$  heißt **gebrochenes Ideal von  $R$** , genau dann wenn  $\exists d \in R, d \neq 0 : a \subset \frac{1}{d}R$ .

*Bemerkung:*

Jedes Ideal von  $R$  ist ein gebrochenes Ideal.

Ist  $a$  ein gebrochenes Ideal von  $R$ , dann gibt es ein Ideal  $b \subset R$  und ein  $d \in R, d \neq 0 : a = \frac{1}{d}b$ . Es gilt  $b \subset a$ .

Denn: wähle  $d \in R, d \neq 0 : a \subset \frac{1}{d}R$  und sei  $b := \{r \in R \mid \frac{r}{d} \in a\}$ . Dann gilt:  $b$  ist ein Ideal in  $R$ , da  $a$  ein  $R$ -Modul ist.  $\frac{1}{d}b \subset a$  und  $a \subset \frac{1}{d}b$ , denn wegen  $a \subset \frac{1}{d}R$  gilt:  $\forall u \in a \exists r \in R : \frac{r}{d} = u$ , also  $r \in b$ .

**Definition 40** Sei  $R$  ein Integritätsring. Seien  $a$  und  $a'$  gebrochene Ideale von  $R$ . Definiere:  $(a : a') := \{q \in \text{quot}(R) \mid qa' \subset a\}$ .

**Satz 41** Mit der Notation von Definition 40 gilt:  $a + a', a \cdot a', a \cap a'$  und  $(a : a')$  sind gebrochene Ideale von  $R$ .

**Beweis.**  $a + a', a \cdot a', a \cap a'$  sind offensichtlich  $R$ -Moduln.

Sei  $a \subset \frac{1}{d}R$  und  $a' \subset \frac{1}{d'}R$ .

Dann gilt:  $a + a' \subset \frac{1}{dd'}R, a \cdot a' \subset \frac{1}{dd'}R, a \cap a' \subset \frac{1}{d}R$

$(a : a')$  ist ein  $R$ -Untermodul von  $\text{quot}(R)$ , denn  $(q_1 + q_2)a' = q_1a' + q_2a' \subset a \forall q_1, q_2 \in (a : a')$  und  $(rq)a' = r(qa') \subset a \forall r \in R, q \in (a : a')$ . Weiterhin gilt wenn  $a' \neq (0)$ , daß  $(a : a') \subset \frac{1}{fd}R$  wobei  $a \subset \frac{1}{d}R$  und  $0 \neq f \in a' \cap R$  (da es ein Ideal  $b \subset R : a' = \frac{1}{d'}b$  gibt und  $(0) \neq b \subset a'$  enthält  $a'$  insbesondere Elemente aus  $R$ ). ■

**Definition 42 (invertierbar)** Sei  $R$  ein Integritätsring. Ein gebrochenes Ideal  $a$  von  $R$  heißt **invertierbar**, genau dann wenn  $a(R : a) = R$

**Definition 43 (Komplementärmodul)** Sei  $R$  ein Integritätsring. Schreibe  $\overline{R}$  für den ganzen Abschluß von  $R$  in  $K := \text{quot}(R)$ . Es gelte  $R = \overline{R}$ . Sei  $K \subset K'$  eine endliche, algebraische, separable Körpererweiterung und  $R \subset R'$  eine ganze Ringerweiterung mit  $K' = \text{quot}(R')$ , also insgesamt:

$$\begin{array}{ccccc} R = \overline{R} & \subset & K & = & \text{quot}(R) \\ & & \cap & & \\ & & R' & \subset & K' = \text{quot}(R') \end{array}$$

Betrachte nun  $\text{Tr}_{K'/K} : K' \rightarrow K$ :

$\mathfrak{C}_{R'/R} := \{z \in K' \mid \text{Tr}_{K'/K}(zR') \subset R\}$  heißt der **Komplementärmodul von  $R'$  in bezug auf  $R$** .

**Satz 44** Mit der Notation wie in Definition 43 gilt:

$\mathfrak{C}_{R'/R}$  ist ein  $R'$ -Modul und ein  $R$ -Modul

$\mathfrak{C}_{R'/R}$  ist ein gebrochenes Ideal von  $R'$

$R' \subset \mathfrak{C}_{R'/R}$ .

**Beweis.** Mit der Bemerkung bei Definition 34 gilt  $\text{Tr}_{K'/K}((z_1 + z_2)r') = \text{Tr}_{K'/K}(z_1r') + \text{Tr}_{K'/K}(z_2r') \in R$  und  $\text{Tr}_{K'/K}((cz)R') \subset \text{Tr}_{K'/K}(zR') \subset R \forall z, z_1, z_2 \in \mathfrak{C}_{R'/R}, c \in R'$ . Für die zweite Behauptung [43], Volume I, Ch. V, Theorem 26. Da  $R = \overline{R}$  gilt  $\text{Tr}_{K'/K}(R') \subset R$  nach [43], Volume I, Ch. V, Theorem 4. ■

**Definition 45 (Differente)** Mit der Notation wie in Definition 43: Die Menge

$$\begin{aligned} D_{R'/R} &:= (R' : \mathfrak{C}_{R'/R}) = \{z \in K' \mid z\mathfrak{C}_{R'/R} \subset R'\} \\ &= \{z \in K' \mid zx \in R' \forall x \in K' \text{ mit } \text{Tr}_{K'/K}(xR') \subset R\} \end{aligned}$$

heißt **Differente von  $R'$  über  $R$** .

**Satz 46** Mit der Notation wie in Definition 43:

$D_{R'/R}$  ist ein Ideal in  $R'$  und  $D_{R'/R} \neq (0)$

**Beweis.**  $\mathfrak{C}_{R'/R}$  ist ein gebrochenes Ideal von  $R'$ , also ist auch  $(R' : \mathfrak{C}_{R'/R})$  ein gebrochenes Ideal von  $R'$  nach der Bemerkung bei Definition 39. Nach dem Beweis von Satz 41 gilt  $D_{R'/R} \subset \frac{1}{1.f}R'$  mit  $0 \neq f \in R' \cap \mathfrak{C}_{R'/R} = R'$  also insbesondere für  $f = 1$ . ■

**Definition 47 (Dedekindring)** Ein Integritätsring  $R$  heißt Dedekindring genau dann, wenn jedes Ideal in  $R$  Produkt von Primidealen ist.

Für einen Dedekindring  $R$  gilt:

1. Jedes gebrochene Ideal von  $R$  ist invertierbar.
2. Sei  $K := \text{quot}(R)$  und  $K \subset K'$  eine endliche, algebraische Körpererweiterung,  $\overline{R}^{K'}$  der ganze Abschluß von  $R$  in  $K'$ . Dann ist  $\overline{R}^{K'}$  wieder ein Dedekindring.

Beweis der Behauptung: [43], Volume I, Ch. V. Theorem 10,19.

**Satz 48** Ein Integritätsring  $R$  ist ein Dedekindring genau dann, wenn gilt:

1.  $R$  ist noethersch
2. Jedes echte Primideal von  $R$  ist ein maximales Ideal
3.  $R$  ist ganz abgeschlossen in  $\text{quot}(R)$ , d.h.  $R = \overline{R} = \overline{R}^{\text{quot}(R)}$

Beweis: [43], Volume I, Ch. V. Theorem 13.

Jeder Hauptidealring ist ein Dedekindring.

Beweis: [43], Volume I, Ch. IV. Theorem 32, Ch V. Ex.1.

**Satz 49** Sei  $R$  ein Dedekindring (insbes. noetherscher Integritätsring und  $R = \overline{R} = \overline{R}^{\text{quot}(R)}$ ).  $K := \text{quot}(R)$ . Sei  $K \subset K'$  sei eine endliche, algebraische, separable Körpererweiterung.  $R' := \overline{R}^{K'}$ . Dann gibt es ein  $y \in R'$  mit  $K' = K(y)$ . (Jedoch i.A.  $R' \neq R[y]$ ). Also insgesamt:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{R}^K & = & R & \subset & K & = & \text{quot}(R) \\ & & \cap & & \cap & & \\ \overline{R}^{K'} & = & R' & \subset & K' & = & K(y) \end{array}$$

Sei  $F(T) \in K[T]$  das Minimalpolynom von  $y$  über  $K$ . Dann gilt:

$$F'(y)R' = C_{R'|R[y]}D_{R'/R}$$

wobei  $F'$  für die Ableitung von  $F$  steht und  $C_{R'|R[y]}$  für den Conductor von  $R[y]$  nach  $R'$  (Definition 9).

Beweis: [43], Volume I, Ch. V. Theorem 29.

**Corollar 50** *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 49 gilt:*

$$F'(y) \mathfrak{C}_{R'/R} = C_{R'|R[y]}$$

**Beweis.**  $\mathfrak{C}_{R'/R}$  ist ein gebrochenes Ideal von  $R'$ . Da nach Voraussetzung  $R$  ein Dedekindring ist, ist jedes gebrochene Ideal invertierbar, also gilt mit  $D_{R'/R} = (R' : \mathfrak{C}_{R'/R})$ , daß  $\mathfrak{C}_{R'/R} D_{R'/R} = R'$ . Da  $\mathfrak{C}_{R'/R}$  ein gebrochenes Ideal in  $R'$  ist und  $C_{R'|R[y]}$  ein Ideal von  $R'$  (und von  $R[y]$ ) ist, gilt  $R' \mathfrak{C}_{R'/R} = \mathfrak{C}_{R'/R}$  und  $R' C_{R'|R[y]} = C_{R'|R[y]}$ . Insgesamt also  $F'(y) \mathfrak{C}_{R'/R} = F'(y) R' \mathfrak{C}_{R'/R} = C_{R'|R[y]} D_{R'/R} \mathfrak{C}_{R'/R} = C_{R'|R[y]} R' = C_{R'|R[y]}$ . ■

### 11.1.2 Algorithmus zur Berechnung des Conductors

**Satz 51** *Sei  $R = k[x_1, \dots, x_m]$  ein endlich erzeugter Integritätsring über einem Körper  $k$ . Sei  $K'$  eine endliche, algebraische Körpererweiterung von  $K = \text{quot}(R) = k(x_1, \dots, x_m)$ .*

*Dann ist der ganze Abschluß  $R' = \overline{R}^{K'}$  von  $R$  in  $K'$  ein endlich erzeugter Integritätsring über  $k$  und ein endlich erzeugter  $R$ -Modul.*

*Beweis:* [43], Volume I, Ch. V. Theorem 9.

Sei  $R = k[x_1, \dots, x_m]$  ein endlich erzeugter Dedekindring (insbes. noetherscher Integritätsring) über einem Körper  $k$ .  $K := \text{quot}(R)$ ,  $R = \overline{R} = \overline{R}^{\text{quot}(R)}$  also  $R$  ganz abgeschlossen in  $\text{quot}(R)$ . Sei  $K \subset K'$  eine endliche, algebraische, separable Körpererweiterung,  $R' := \overline{R}^{K'}$ . Sei  $y \in R'$  mit  $K' = K(y)$ . Nach Satz 51 ist also  $R'$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul.  $\mathfrak{C}_{R'/R}$  ist ein gebrochenes Ideal von  $R'$ . Damit gibt es eine endliche  $R$ -Modulbasis von  $\mathfrak{C}_{R'/R}$ . Corollar 50 liefert dann eine endliche  $R$ -Modulbasis des Conductors  $C_{R'|R[y]}$ .

Wir suchen nun eine endliche  $R$ -Modulbasis von  $\mathfrak{C}_{R'/R}$ . Wir gehen aus von einer nach Satz 51 endlichen Ganzheitsbasis  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  von  $R'$  über  $R$ , also  $K' = \sum_{i=1}^n K e_i$ . Betrachte die Matrix  $T = ((T_{K'/K}(e_i e_j)))_{i,j=1, \dots, n}$

**Satz 52** *Sei  $K \subset K'$  eine algebraische Körpererweiterung und  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  eine Basis der Körpererweiterung. Dann gilt*

$$K \subset K' \text{ inseparabel} \Leftrightarrow T_{K'/K}(w) = 0 \forall w \in K' \Leftrightarrow \det((T_{K'/K}(e_i e_j))) = 0$$

*Beweis:* [43], Volume I, Ch. II. §11.

Da nach Voraussetzung  $K \subset K'$  separabel ist, gilt mit Satz 52, daß  $\det(T) = \det((T_{K'/K}(e_i e_j))) \neq 0$ , also ist  $T$  invertierbar, also hat das folgende lineare Gleichungssystem

$$\delta_{ij} = \sum_{l=1}^n b_{il} T_{K'/K}(e_l e_j), \quad i, j = 1, \dots, n$$

eine eindeutige Lösung  $b_{il} \in K = k(x)$ ,  $i, l = 1, \dots, n$ . Setze nun  $\eta_i := \sum_{l=1}^n b_{il} e_l$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Dann gilt  $\sum_{j=1}^n T_{K'/K}(e_i e_j) \eta_j = \sum_{j,l=1}^n b_{lj} T_{K'/K}(e_i e_j) e_l = \sum_{l=1}^n \delta_{il} e_l = e_i$ , also ist  $\{\eta_i\}_{i=1, \dots, n}$  ebenfalls eine Basis der Körpererweiterung  $K \subset K'$ .

Nach der Bemerkung bei Definition 34 ist  $T_{K'/K}$  linear, also gilt  $T_{K'/K}(\eta_i e_j) = T_{K'/K}(\sum_{l=1}^n b_{li} e_l e_j) = \sum_{l=1}^n b_{li} T_{K'/K}(e_l e_j) = \delta_{ij}$  (Bem:  $b_{li} = b_{il}$ ). Damit folgt für ein  $z' := \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \in K'$ , wobei  $\xi_i \in K$  und ein  $r' := \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in R'$ , wobei

$\alpha_j \in R$ , daß:  $T_{K'/K}(z'r') = T_{K'/K}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \alpha_j \eta_i e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \alpha_j T_{K'/K}(\eta_i e_j) = \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i$ .

**Satz 53** Mit der eingeführten Notation gilt:  $\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n}$  ist dann eine  $R$ -Modulbasis von  $\mathfrak{C}_{R'/R}$ .

**Beweis.** Sei  $z' \in \mathfrak{C}_{R'/R} \Rightarrow z' \in K'$  und  $Tr_{K'/K}(z'R') \subset R \Rightarrow \exists \xi_i \in K$  sodaß  $z' = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$  und  $\forall r' = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$  mit  $\alpha_j \in R$  gilt  $R \ni Tr_{K'/K}(z'r') = \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i \Rightarrow$  speziell für  $\alpha_i = \delta_{li}$  gilt  $\xi_l \in R \forall l = 1, \dots, n$  und  $z' = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \Rightarrow z' \in \sum_{i=1}^n R \eta_i$ . Sei umgekehrt  $z' = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$  mit  $\xi_i \in R \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow$  Für  $r' = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$  mit  $\alpha_j \in R$  gilt  $Tr_{K'/K}(z'r') = \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i \in R \Rightarrow Tr_{K'/K}(z'R') \subset R \Rightarrow z' \in \mathfrak{C}_{R'/R}$ . ■

Mit Satz 50 erhalten wir also folgenden Algorithmus zur Berechnung des Conductors. Dieser Algorithmus wurde in [29] angegeben. (Vorsicht: In [29] wird auch "gezeigt", daß ein Divisor zu einer ebenen Kurve  $A1$ -adjungiert ist genau dann, wenn er  $A2$ -adjungiert ist, siehe Abschnitt 6).

Sei  $F(T) \in K[T]$  das Minimalpolynom von  $y$  über  $K$

1. Berechne den ganzen Abschluß  $R'$  von  $R$  in  $K'$ , d.h. gebe eine endliche  $R$ -Modulbasis  $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$  von  $R'$  an
2. Berechne eine endliche  $R$ -Modulbasis  $\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n}$  von  $\mathfrak{C}_{R'/R}$  aus  $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$  und zwar folgendermaßen:

- Löse das lineare Gleichungssystem

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} T_{K'/K}(e_k e_j), \quad i, j = 1, \dots, n$$

nach  $b_{ik} \in K = k(x)$ ,  $i, k = 1, \dots, n$

- Berechne  $\eta_i := \sum_{k=1}^n b_{ki} e_k$ ,  $i = 1, \dots, n$

$\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n}$  ist dann eine endliche  $R$ -Modulbasis von  $\mathfrak{C}_{R'/R}$

3.  $\{F'(y) \eta_i\}_{i=1,\dots,n}$  ist dann eine endliche  $R$ -Modulbasis von  $C_{R'|R[y]}$

### 11.1.3 Anwendung für ebene Kurven

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $char(k) = 0$ ,  $C = V(F)$  mit  $F \in k[X, Y]$ ,  $F$  irreduzibel, eine affine ebene irreduzible Kurve. Sei  $n := \deg(F) \geq 3$ . Sei  $k[C] := k[X, Y]/(F)$  der Koordinatenring und  $k(C) := \text{quot}(k[C])$  der Körper der rationalen Funktionen auf  $C$ . Sei  $x = \bar{X} \in k[C]$  und  $y = \bar{Y} \in k[C]$ , also  $k[C] = k[x, y]$ .

**Definition 54** Eine Transzendenzbasis  $\{z_1, \dots, z_m\}$  heißt **separierende Transzendenzbasis der Körpererweiterung**  $L \subset K$  genau dann, wenn  $K$  eine separable algebraische Körpererweiterung von  $L(z_1, \dots, z_m)$  ist.

Ein Körper  $K$  heißt **separabel erzeugt über**  $L$  genau dann, wenn es eine separierende Transzendenzbasis der Körpererweiterung  $L \subset K$  gibt.

**Satz 55 (Normalisierungslemma)** Sei  $k$  ein unendlicher Körper und  $B = k[x_1, \dots, x_m]$  ein endlich erzeugter Integritätsring und sei  $d$  der Transzendenzgrad von  $k(x_1, \dots, x_m)$  über  $k$ . Dann gibt  $l_{ij} \in k$ ,  $i = 1, \dots, d$  und  $j = 1, \dots, m$ , sodaß für  $y_i := \sum_{j=1}^m l_{ij} x_j$ ,  $i = 1, \dots, d$  gilt, daß  $B$  ganz über  $k[y_1, \dots, y_d]$  ist. Außerdem gilt, daß  $k[y_1, \dots, y_d]$  ein Polynomring ist und  $y_1, \dots, y_d$  algebraisch unabhängig sind. Ist  $k(x_1, \dots, x_m)$  separabel erzeugt über  $k$ , dann kann man  $y_1, \dots, y_m$  so wählen, daß  $k(x_1, \dots, x_m)$  eine separable Körpererweiterung von  $k(y_1, \dots, y_d)$  ist.  $y_1, \dots, y_d$  ist eine separierende Transzendenzbasis von  $k(x_1, \dots, x_m)$  über  $k$ .

*Beweis:* [43], Volume I, Ch. V. Theorem 8.

Für den Fall einer ebenen Kurve setze in Satz 55  $B = k[C] = k[x, y]$ , also ist  $d = 1$  und es gibt ein  $x' = l_1 x + l_2 y$ , sodaß  $B$  ganz über  $k[x']$  ist und  $k(x, y)$  separabel über  $k(x')$  ist. Man kann also ohne Einschränkung davon ausgehen, daß  $F$  von der Form  $Y^n + a_{n-1}(X)Y^{n-1} + \dots + a_0(X)$  ist,  $y$  ganz über  $k[x]$  ist, also  $\overline{k[x]}^{k(x,y)} = \overline{k[C]}^{k(x,y)}$ .

Setze nun:

$$R := k[x] \quad K := \text{quot}(R) = k(x) \quad \text{also } R = k[x] = \overline{k[x]}^{k(x)} = \overline{R}^K = \overline{R} \\ K' := K(y) = k(C) \quad R' := \overline{R}^{K'} = \overline{k[x]}^{k(C)} = \overline{k[C]}^{k(C)} = \overline{k[C]}$$

und  $R$  ist nach Satz 48 ein Dedekindring. Damit erhält man folgenden Algorithmus zur Berechnung von  $C_{\overline{k[C]}|k[C]}$  gemäß dem letzten Abschnitt:

**Algorithmus 56** Berechnung von  $C_{\overline{k[C]}|k[C]}$ :

1. Berechne den ganzen Abschluß  $R'$  von  $R$  in  $k(C)$ , d.h. eine endliche  $R$ -Modulbasis  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  von  $R'$  (Ganzheitsbasis) mit dem Algorithmus aus Abschnitt 9.
2. Berechne eine endliche  $R$ -Modulbasis  $\{\eta_i\}_{i=1, \dots, n}$  von  $\mathfrak{C}_{R'/R}$  aus  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  und zwar folgendermaßen:

- Löse das lineare Gleichungssystem

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} T_{K'/K}(e_k e_j), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

nach  $b_{ik} \in K = k(x)$ ,  $i, k = 1, \dots, n$

- Berechne  $\eta_i := \sum_{k=1}^n b_{ki} e_k$ ,  $i = 1, \dots, n$

$\{\eta_i\}_{i=1, \dots, n}$  ist dann eine endliche  $R$ -Modulbasis von  $\mathfrak{C}_{R'/R}$

3.  $\left\{ \frac{\partial F}{\partial Y}(x, y) \eta_i \right\}_{i=1, \dots, n}$  ist dann eine endliche  $R$ -Modulbasis von  $C_{R'|R[y]} = C_{\overline{k[C]}|k[C]}$

Da  $C_{\overline{k[C]}|k[C]}$  ein Ideal in  $k[C]$  ist, haben sich also die Nenner der Ganzheitsbasis gekürzt.

Praktisch führt man den Algorithmus folgendermaßen durch:

- Für  $i, j = 1, \dots, n$  berechnet man  $T_{K'/K}(e_i e_j)$  wie folgt:

Sei  $e := \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \in R_n$ . Zu lösen ist mit  $A_{i,j} = ((a_{ijkm}))_{k,m=1,\dots,n}$  das Gleichungssystem  $e_i e_j e = A_{i,j} e$  für  $1 \leq i \leq j \leq n$  nach  $A_{i,j} \in K_{n,n} = k(x)_{n,n}$ , äquivalent  $e_i e_j e_k = \sum_{m=1}^n a_{ijkm} e_m$  nach  $\underline{a}_{ijk} := \begin{pmatrix} a_{ijk1} & \dots & a_{ijkn} \end{pmatrix}$  für  $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$ . Seien nun  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  fest:

Man hat eine Gleichung für  $n$  Unbekannte, wobei die eine Gleichung nach Aufspaltung nach den Koeffizienten von  $y^0, \dots, y^{n-1}$  aber  $n$  Gleichungen liefert: Der Algorithmus aus Abschnitt 9 erzeugt eine Ganzheitsbasis  $\{e_m\}_{m=1,\dots,n}$  der Form

$$e_m = \sum_{l=1}^n s_{ml} y^{l-1}, m = 1, \dots, n \text{ mit } s_{ml} \in K = k(x)$$

$$S := ((s_{ml}))_{\substack{m=1,\dots,n \\ l=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ * & & * \end{pmatrix} \text{ ist eine linke untere Dreiecksmatrix}$$

$$\text{Schreibe } e_i e_j e_k =: \sum_{l=1}^n g_{ijkl} y^{l-1} \text{ mit } g_{ijkl} \in K$$

$$\text{Setze } \underline{g}_{ijk} := \begin{pmatrix} g_{ijk1} & \dots & g_{ijkn} \end{pmatrix} \text{ und } G_{ij} := ((g_{ijkl}))_{\substack{k=1,\dots,n \\ l=1,\dots,n}}$$

$$\text{Es soll gelten } e_i e_j e_k = \sum_{m=1}^n a_{ijkm} e_m = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{m=1}^n a_{ijkm} s_{ml} \right) y^l \text{ also}$$

$$g_{ijkl} = \sum_{m=1}^n a_{ijkm} s_{ml}$$

$$\text{also } G_{ijk} = \underline{a}_{ijk} S \text{ also}$$

$$S^T \underline{a}_{ijk}^T = \underline{g}_{ijk}^T$$

Diese Gleichung ist leicht durch Rückwärtseinsetzen zu lösen, da  $S^T$  eine rechte obere Dreiecksmatrix ist. Alternativ kann man einmalig  $(S^T)^{-1}$  berechnen. Man kann auch schreiben

$$S^T A_{ij} = G_{ij}$$

Tatsächlich interessiert nur

$$T_{K'/K}(e_i e_j) = \sum_{k=1}^n a_{ijkk} = \sum_{k=1}^n \sum_{o=1}^n \left( (S^T)^{-1} \right)_{ko} g_{ijok} = \sum_{k=1}^n \sum_{o=1}^k \left( (S^T)^{-1} \right)_{ko} g_{ijok}$$

Man muß also  $\frac{n(n+1)}{2}$  Einträge von  $((T_{K'/K}(e_i e_j)))_{i,j=1,\dots,n}$  berechnen, je mit Aufwand  $\frac{n(n+1)}{2}$  also im wesentlichen  $\frac{1}{4}n^4$  Punktoperationen in  $K$ .

- Zu beachten ist: Falls für die oben definierten Koeffizienten  $s_{ml} \in K = k(x)$  gilt, daß  $s_{ml} \in \tilde{k}(x)$ , wobei  $\tilde{k} \subset k$  ein Unterkörper ist, dann sind auch die  $T_{K'/K}(e_i e_j) \in \tilde{k}(x)$ .

- Für die symmetrische Matrix  $T = ((T_{K'/K}(e_i e_j)))_{i,j=1,\dots,n}$  berechnet man nun eine  $LR = PT$  Zerlegung, wobei  $L \in K_{n,n}$  für eine linke untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen steht,  $R \in K_{n,n}$  für eine rechte obere Dreiecksmatrix und  $P$  für eine Permutationsmatrix:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}, P = (E_{\pi(1)}, \dots, E_{\pi(n)}),$$

wobei  $E_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor ist und  $\pi \in S_n$ .

Man beachte, daß für die Speicherung während der Berechnung von  $L$  und  $R$  eine einzige  $n \times n$ -Matrix ausreicht, wobei  $T$  überschrieben werden kann und der Aufwand für die  $LR$ -Zerlegung im wesentlichen  $\frac{1}{3}n^3$  Punktoperationen in  $K$  beträgt.

- Aus  $PT = LR$  folgt, daß  $T^{-1} = (P^{-1}LR)^{-1} = R^{-1}L^{-1}P$ . Also gilt, daß

$$\eta := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = T^{-1}e = R^{-1}L^{-1}P e \quad (T^{-1} \text{ ist symmetrisch}), \text{ bzw. } LR\eta =$$

$Pe$ , was durch Vorwärtseinsetzen und Rückwärtseinsetzen zu lösen ist.  $P$  permutiert nur die Einträge in der Ganzheitsbasis  $e$ . Vorwärtseinsetzen und Rückwärtseinsetzen erfordert im wesentlichen  $n^2$  Punktoperationen.

- Schließlich berechnet man  $\tilde{\eta} := \frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)\eta$ . Die Einträge von  $\tilde{\eta}$  bilden dann eine endliche  $R$ -Modulbasis von  $C_{\overline{k[C]}|k[C]}$ .

Praktischer ist es zunächst  $\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)e$  zu berechnen, die Repräsentanten in  $k(X)[Y]/(F(X, Y))$  auf Potenzen  $Y^0, \dots, Y^{n-1}$  zu reduzieren und dann  $LR\tilde{\eta} = P(\frac{\partial F}{\partial Y}(x, y)e)$  zu lösen.

- Zu beachten ist: Falls die  $T_{K'/K}(e_i e_j) \in \tilde{k}(x)$  und  $F \in \tilde{k}[X, Y]$ , wobei  $\tilde{k} \subset k$  ein Unterkörper ist, dann sind die Einträge von  $\tilde{\eta}$  in  $\tilde{k}[x, y]$ .

Konkret wäre z.B.  $k = \mathbb{C}$  und  $\tilde{k} = \mathbb{Q}$ ,  $F \in \mathbb{Q}[X, Y]$ , der Ganzheitsbasialgorithmus berechnet  $\overline{\mathbb{C}[x]}^{\mathbb{C}(C)}$ , wobei die Ganzheitsbasis Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  hat, und man erhält schließlich Erzeuger des Ideals  $C_{\overline{\mathbb{C}[C]}|\mathbb{C}[C]}$  in  $\mathbb{C}[C]$ , die Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  haben.

#### 11.1.4 Herstellung der Beziehung zwischen $\mathfrak{G}$ und $C_{\overline{k[C]}|k[C]}$

Sei  $C$  wie im letzten Abschnitt. Nach dem Normalisierungslemma 55 kann man nach einem Koordinatenwechsel annehmen, daß  $k[C]$  ganz über  $k[x]$  ist. Damit liefert der Algorithmus aus dem letzten Abschnitt eine endliche  $R$ -Modulbasis von  $C_{R'|R[y]} = C_{\overline{k[C]}|k[C]}$ . Außerdem kann man annehmen, daß  $C$  keine Singularitäten im Unendlichen hat.

Sei nun  $\mathfrak{G}$  das  $A_2$ -adjungierte Ideal der projektiven Kurve  $C^* = V(F^*) \subset \mathbb{P}_k^2$  mit  $F^* \in k[X, Y, Z]$  die Homogenisierung von  $F$ . Sei nun  $\tilde{\mathfrak{G}} \subset k[C]$  das Bild von  $\{g(X, Y, 1) \mid g \in \mathfrak{G}\} \subset k[X, Y]$  in  $k[C] = k[X, Y]/\langle F \rangle$ .

**Bemerkung 57** Für eine solche affine ebene irreduzible Kurve  $C$  gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{G}} &= \bigcap_{P \in C} C_{\overline{\mathcal{O}_{C,P}}|\mathcal{O}_{C,P}} = \\
&= \bigcap_{P \in C} \{s \in \mathcal{O}_{C,P} \mid s\overline{\mathcal{O}_{C,P}} \subset \mathcal{O}_{C,P}\} = \\
&= k[C] \cap \bigcap_{P \in \text{Sing}(C)} \{s \in \mathcal{O}_{C,P} \mid s\overline{\mathcal{O}_{C,P}} \subset \mathcal{O}_{C,P}\} = \\
&= k[C] \cap \bigcap_{P \in \text{Sing}(C)} C_{\overline{\mathcal{O}_{C,P}}|\mathcal{O}_{C,P}} \\
&= \{s \in k[C] \mid s\overline{\mathcal{O}_{C,P}} \subset \mathcal{O}_{C,P} \forall P \in \text{Sing}(C)\}
\end{aligned}$$

**Beweis.**  $C_{\overline{\mathcal{O}_{C,P}}|\mathcal{O}_{C,P}} = \mathcal{O}_{C,P}$  falls  $P \notin \text{Sing}(C)$ , denn dann ist  $\mathcal{O}_{C,P} = \overline{\mathcal{O}_{C,P}}$  und  $k[C] = \bigcap_{P \in C} \mathcal{O}_{C,P}$ . ■

**Proposition 58** Für eine solche affine ebene irreduzible Kurve  $C$  gilt  $\tilde{\mathfrak{G}} = C_{\overline{k[C]}|k[C]}$  und damit kann mit dem angegebenen Algorithmus  $\tilde{\mathfrak{G}}$  und damit auch  $\mathfrak{G}$  für  $C^*$  berechnet werden.

**Beweis.**  $\tilde{\mathfrak{G}} = \bigcap_{P \in C} C_{\overline{\mathcal{O}_{C,P}}|\mathcal{O}_{C,P}} = C_{\overline{k[C]}|k[C]}$ . ■

## 11.2 Berechnung des adjungierten Ideals aus der Standardzerlegung der Singularitäten

Sei  $k$  ein Körper mit  $\text{char}(k) = 0$ , und sei  $C^*$  eine irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad  $n \geq 3$  über einem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von  $k$  mit Gleichung in  $k[X, Y, Z]$ . Man berechnet mit Abschnitt 10.2.1 eine Standardzerlegung der Form

$$\bigcup_i \{(m_0(a_0, a_1) : m_1(a_0, a_1) : m_2(a_0, a_1)) \mid A_i(a_0, a_1) = 0\}$$

mit  $A_i \in k[a_0, a_1]$  irreduzibel und homogen, der Singularitäten von  $C^*$ .

Falls  $C^*$  nur gewöhnliche Mehrfachpunkte hat, was mit Abschnitt 10.3 erreicht werden kann, reicht es, alle Standardfamilien zu betrachten. Sei also

$$\{(m_0(a_0, a_1) : m_1(a_0, a_1) : m_2(a_0, a_1)) \mid A(a_0, a_1) = 0\}$$

mit  $A \in k[a_0, a_1]$  irreduzibel und homogen, eine Standardfamilie von gewöhnlichen Mehrfachpunkten der Multiplizität  $r$ . Sei  $h = \deg(A)$  und  $l := \deg(m_0) = \deg(m_1) = \deg(m_2)$ . Die adjungierten Kurven vom Grad  $m$  erhält man wie folgt: Betrachte ein homogenes Polynom  $H(X, Y, Z) = \sum_{i+j+k=m} c_{ijk} X^i Y^j Z^k$

vom Grad  $m$  mit unbestimmten Koeffizienten. Es gilt  $m_{(m_0(a_0, a_1):m_1(a_0, a_1):m_2(a_0, a_1))}(H) \geq r - 1 \forall (a_0, a_1) \in \mathbb{P}_k^1$  mit  $A(a_0, a_1) = 0$  genau dann, wenn gilt

$$\frac{\partial^{r-2} H}{\partial X^p \partial Y^q \partial Z^w} (m_0(a_0, a_1) : m_1(a_0, a_1) : m_2(a_0, a_1)) = 0 \text{ mod } A$$

$\forall p, q, w \in \mathbb{N}_0$  mit  $p + q + w = r - 2$ . Dies ist aber genau dann der Fall, wenn es für jedes der  $\frac{(r-1)r}{2}$  Tupel  $(p, q, w)$  mit  $p + q + w = r - 2$ ,  $p, q, w \in \mathbb{N}_0$ , ein

homogenes Polynom  $Q_{p,q,w} \in k[a_0, a_1]$  mit  $\deg(Q_{p,q,w}) = l(m - (r - 2)) - h$  gibt, sodaß

$$\frac{\partial^{r-2} H}{\partial X^p \partial Y^q \partial Z^w} (m_0(a_0, a_1) : m_1(a_0, a_1) : m_2(a_0, a_1)) = Q_{p,q,w} A$$

Das Polynom  $Q_{p,q,w}$  hat  $l(m - (r - 2)) - h + 1$  Koeffizienten.

Man hat höchstens  $l(m - (r - 2)) + 1$  lineare unabhängige Gleichungen für die Koeffizienten von  $Q_{p,q,w}$  und  $H$ . Nach Elimination der Koeffizienten von  $Q_{p,q,w}$  hat man also noch maximal  $l(m - (r - 2)) + 1 - (l(m - (r - 2)) - h + 1) = h$  lineare unabhängige Gleichungen für die  $\frac{(m+2)(m+1)}{2}$  Koeffizienten von  $H$ . Alle Tupel zusammengenommen liefern also maximal  $h \frac{r(r-1)}{2}$  Gleichungen für  $\frac{(m+2)(m+1)}{2}$  Unbekannte. Hat  $C$  nur gewöhnliche Mehrfachpunkte und  $s$  Standardfamilien der Multiplizität  $r_i$  mit jeweils  $s_i$  Punkten für  $i = 1, \dots, s$ , dann bleiben für  $m = n - 2$  mindestens

$$\frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^s s_i \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = n-1$$

Koeffizienten unbestimmt. Da  $\dim(\mathfrak{G}_{n-2}) = n-1$  ist bleiben genau  $n-1$  Koeffizienten unbestimmt und man erhält somit eine  $k$ -Vektorraumbasis von  $\mathfrak{G}_{n-2}$ .

## 11.3 Berechnung des adjungierten Ideals aus der freien Auflösung des Jacobiideals

### 11.3.1 Vorbemerkungen

#### Graduierte freie Auflösungen

**Definition 59** Sei  $R$  ein noetherscher Ring.

- Ein **Komplex von  $R$ -Moduln** ist eine Sequenz von  $R$ -Moduln  $F_i$  und Homomorphismen  $d_i : F_i \rightarrow F_{i-1}$ , sodaß  $d_{i-1} \circ d_i = 0$ .
- Eine **projektive Auflösung eines  $R$ -Moduls  $M$**  ist ein Komplex

$$\dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0$$

von projektiven  $R$ -Moduln  $F_i$ , sodaß  $\text{coker}(d_1) = M$  und  $\ker(d_{i-1}) = \text{image}(d_i)$ . Oft schreibt man auch

$$\dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Ist  $F_{m+1} = 0$  mit einem  $m \in \mathbb{N}_0$  dann heißt  $m$  die **Länge der Auflösung**. Sind alle  $F_i$  frei, dann heißt die Auflösung eine **freie Auflösung**.

- Ist  $I \subset R$  ein Ideal und  $M = R/I$  dann schreibe für eine freie Auflösung

$$\dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0$$

von  $M$  auch

$$\dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} I \rightarrow 0$$

und bezeichne dies als eine freie Auflösung von  $I$ .

- Sei  $R$  ein graduierter Ring. Ein **graduierter  $R$ -Modul**  $M$  ist ein  $R$ -Modul  $M$ , sodaß  $M = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} M_i$ , wobei  $M_i$  ein  $R$ -Vektorraum  $\forall i$  und  $M_i = 0 \forall i \leq \alpha$  mit einem  $\alpha \in \mathbb{Z}$  und  $R_j M_i \subseteq M_{i+j} \forall i, j$ .

Ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $M \xrightarrow{d} G$ , wobei  $M$  und  $G$  graduierte  $R$ -Moduln sind, heißt **graduierter  $R$ -Modulhomomorphismus**, wenn  $d(M_i) \subseteq G_i$ .

- Eine **graduierte freie Auflösung** eines graduierten  $R$ -Moduls  $M$  ist eine freie Auflösung

$$\dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

sodaß alle  $F_i$  graduierte  $R$ -Moduln sind und alle  $d_i$  graduierte Homomorphismen.

- Sei  $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$  und  $\mathfrak{m} = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$ . Eine graduierte freie Auflösung heißt **minimal**, wenn gilt  $\text{image}(d_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1} \forall i \geq 1$ .

### Exaktheitskriterien für Komplexe von $R$ -Moduln

**Definition 60 (reguläre Sequenz)** Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $M$  ein  $R$ -Modul.

- $a \in R$  heißt  $M$ -**regulär**, genau dann wenn gilt  $(az = 0 \Rightarrow z = 0) \forall z \in M$ , also genau dann wenn die Abbildung  $\mu : M \rightarrow M, x \mapsto ax$  injektiv ist.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^m$  heißt  $M$ -**reguläre Sequenz**, wenn gilt:
  1.  $\langle a_1, \dots, a_m \rangle M \neq M$
  2. Für  $i = 1, \dots, m$  ist  $a_i$  ein  $M_{i-1}$ -reguläres Element, wobei  $M_i := M / \langle a_1, \dots, a_i \rangle M$  für  $i = 1, \dots, m-1$  und  $M_0 = M$ , das heißt für  $i = 1, \dots, m$  ist die Abbildung  $\mu_i : M_{i-1} \rightarrow M_{i-1}, x \mapsto a_i x$  injektiv.
- Eine  $M$ -reguläre Sequenz  $(a_1, \dots, a_m)$  liefert eine aufsteigende Idealkette  $\langle a_1 \rangle \subset \langle a_1, a_2 \rangle \subset \dots \subset \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ . Da  $R$  noethersch ist, existieren in einem Ideal  $J \subset R$  maximale  $M$ -reguläre Sequenzen.

**Satz 61 (Northcott-Rees)** Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul und  $J \subset R$  ein Ideal mit  $JM \neq M$ .

Dann haben alle maximalen  $M$ -regulären Sequenzen in  $J$  die gleiche Länge  $n$  und es gilt

$$n = \min \{i \mid \text{Ext}_R^i(R/J, M) \neq 0\}$$

Beweis: [7], 1.2.5.

**Definition 62 (Tiefe)** Sei  $R$  ein noetherscher Ring.

- Sei  $J \subset R$  ein Ideal,  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul und  $JM \neq M$ .  $\text{depth}(J, M)$  ist definiert als die Länge einer maximalen  $M$ -regulären Sequenz in  $J$  (wohldefiniert wegen Satz 61).  
Es gilt  $\text{depth}(J, M) = \text{depth}(\sqrt{J}, M)$  (Beweis: [7], 1.2.10).

- Sei  $R$  ein noetherscher Ring,  $J \subset R$  ein Ideal.  
 $\text{depth}(J) := \text{depth}(J, R)$  ist die Länge einer maximalen  $R$ -regulären Sequenz in  $J$ , also  $\text{depth}(J) = \min \{i \mid \text{Ext}_R^i(R/J, R) \neq 0\}$ .
- Sei  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Setze

$$\text{grade}(M) := \min \{i \mid \text{Ext}_R^i(M, R) \neq 0\}$$

Für ein Ideal  $J \subset R$  gilt also

$$\text{grade}(R/J) = \min \{i \mid \text{Ext}_R^i(R/J, R) \neq 0\} = \text{depth}(J, R) = \text{depth}(J)$$

**Definition 63** Seien  $P$  und  $Q$  freie  $R$ -Moduln,  $\text{rank}(P) = m_1$ ,  $\text{rank}(Q) = m_2$ ,  $g : P \rightarrow Q$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus. Für  $k \in \mathbb{N}$  hat man eine Abbildung  $\bigwedge^k g : \bigwedge^k P \rightarrow \bigwedge^k Q$  und damit eine Abbildung

$$\Psi : \left( \bigwedge^k Q \right)^* \otimes \bigwedge^k P \rightarrow R$$

$I_k(g) := \text{image}(\Psi)$ .

Wählt man Basen  $\mathfrak{B}_P$  und  $\mathfrak{B}_Q$  von  $P$  bzw.  $Q$  und ist  $d = \Phi_{\mathfrak{B}_Q, \mathfrak{B}_P}(g)$  die darstellende Matrix von  $g$  bezüglich dieser Basen, dann gilt für  $k \leq \min \{m_1, m_2\}$  daß  $I_k(g)$  das Ideal der  $k \times k$ -Minoren von  $d$  ist, insbesondere ist dieses unabhängig von den gewählten Basen. Wenn  $\bigwedge^{j+1} g = 0$  und  $\bigwedge^j g \neq 0$ , dann setze  $\text{rank}(g) := j$ .

$I(g) := I_{\text{rank}(g)}(g)$

Ist  $g = 0$  dann ist  $\text{rank}(g) = 0$  und  $I(g) = R$ .

**Satz 64 (Buchsbaum-Eisenbud)** Sei  $R$  ein noetherscher Ring, sei  $0 \rightarrow P_m \xrightarrow{g_m} P_{m-1} \xrightarrow{g_{m-1}} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{g_1} P_0$  ein Komplex von endlich erzeugten freien  $R$ -Moduln und seien die  $g_i \neq 0$ . Dann gilt, der Komplex ist exakt genau dann, wenn  $\forall k \in \mathbb{N}_0$  gilt:

1.  $\text{rank}(g_k) + \text{rank}(g_{k+1}) = \text{rank}(P_k)$
2.  $\text{depth}(I(g_k)) \geq k$

Beweis: [5]

**Satz 65** Sei  $g : R^{m_1} \rightarrow R^{m_2}$  eine Abbildung von freien  $R$ -Moduln. Dann gilt

$$\text{depth}(I_j(g)) \leq (m_1 - j + 1)(m_2 - j + 1) \quad \forall j \leq \min \{m_1, m_2\}$$

Beweis: [12]

**Satz 66** Sei  $g : R^m \rightarrow R^{m+1}$  eine  $(m+1) \times m$ -Matrix mit  $\text{depth}(I_m(g)) \geq 2$ . Dann gibt es einen Basiswechsel  $e_0 : R^{m+1} \rightarrow R^{m+1}$ , sodaß jedes Paar von  $m \times m$ -Minoren von  $e_0 g$  ein Ideal der Tiefe 2 erzeugt.

Beweis: [5]

**Satz 67** Sei  $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$  ein graduerter Ring und  $m = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots$ . Sei  $g$  eine  $m_1 \times m_2$ -Matrix mit Einträgen in  $m$ . Sei  $m_1 \leq m_2$  und  $\text{rank}(g) = m_1$  und  $\text{depth}(I(g)) = m_2 - m_1 + 1$  (der größtmögliche Wert). Dann gilt für alle  $j$  mit  $m_1 \leq j \leq m_2$  und jede  $m_1 \times j$ -Untermatrix  $g'$  von  $g$ , daß  $\text{depth}(I(g')) = j - m_1 + 1$ .

Beweis: [5]

**Satz 68 (Hilbert-Burch)** Sei  $R$  ein noetherscher Ring.

- Sei  $J \subset R$  ein Ideal mit einer freien Auflösung

$$0 \rightarrow R^m \xrightarrow{g_1} R^{m+1} \xrightarrow{g_0} J \rightarrow 0$$

Dann existiert ein  $R$ -reguläres Element  $e$ , sodaß  $J = eI_m(g_1)$ .

- Sei andererseits  $g_1 : R^m \rightarrow R^{m+1}$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus mit

$$g_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{m+1} \end{pmatrix}, \text{depth}(I_m(g_1)) \geq 2, \text{ sei } J := I_m(g_1), \text{ sei } e_i := (\delta_{j,i})_{j=1, \dots, m+1}$$

und sei  $g_0 : R^{m+1} \rightarrow R$  definiert durch

$$g_0(e_i) = (-1)^i \det \begin{pmatrix} f_1^T & \dots & f_{i-1}^T & f_{i+1}^T & \dots & f_{m+1}^T \end{pmatrix}$$

Dann ist  $0 \rightarrow R^m \xrightarrow{g_1} R^{m+1} \xrightarrow{g_0} J \rightarrow 0$  eine freie Auflösung von  $J$ .

Beweis: [7], 1.4.16.

**Satz 69** Sei  $R$  ein noetherscher Ring.

Sei  $h_2 : R^m \rightarrow R^{m+2}$  eine Abbildung von freien  $R$ -Moduln mit  $\text{rank}(h_2) =$

$m$  und  $\text{depth}(I(h_2)) \geq 3$ . Schreibe  $h_2 = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{m+2} \end{pmatrix}$  und setze

$$J := \langle \det \begin{pmatrix} f_1^T & \dots & f_{m-1}^T & f_m^T \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} f_1^T & \dots & f_{m-1}^T & f_{m+1}^T \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} f_1^T & \dots & f_{m-1}^T & f_{m+2}^T \end{pmatrix} \rangle$$

Es gelte  $\text{depth}(J) \geq 2$ . Sei  $b : (R^{m+2})^* \rightarrow R^3$  die Projektion auf die letzten 3 Erzeuger. Dann gibt es eine Abbildung  $a : R^{m+2} \rightarrow (R^{m+2})^*$ , sodaß mit

$h_1 := b \circ a$  und  $h_0 := \begin{pmatrix} m \\ \wedge h_2^* \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ \wedge b^* \end{pmatrix}$  der Komplex

$$0 \rightarrow R^m \xrightarrow{h_2} R^{m+2} \xrightarrow{h_1} R^3 \xrightarrow{h_0} J \rightarrow 0$$

eine freie Auflösung des Ideals  $J$  ist. Dabei wird identifiziert  $\wedge^2 R^{3*}$  mit  $R^3$  und  $\wedge^2 R^{m+2}$  mit  $\wedge^m R^{m+2*}$ .

Bemerkung:

Mit  $a_2 := \wedge^m h_2 : R = \wedge^m R^m \rightarrow \wedge^m R^{m+2}$  ist  $a$  gegeben durch:

$$\begin{array}{ccc} R \otimes \wedge^{m+1} R^{m+2*} & \xrightarrow{a_2 \otimes 1} & \wedge^m R^{m+2} \otimes \wedge^{m+1} R^{m+2*} \\ \parallel & & \downarrow n \\ R^{m+2} & \xrightarrow{a} & R^{m+2*} \end{array}$$

$\text{depth}(I(h_2)) \geq 3 \Leftrightarrow \text{depth}(I(h_2)) = 3$  mit Satz 65.

Die Bedingung  $\text{depth}(J) \geq 2$  kann immer durch einen Basiswechsel in  $R^{m+2}$  erfüllt werden, denn wegen  $\text{depth}(I(h_2)) = 3$  gilt mit Satz 67, daß

$\text{depth}\left(I\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{m+1} \end{pmatrix}\right)\right) = 2$ , und damit gibt es mit Satz 66 einen Basiswechsel in  $R^{m+1}$  sodaß

$$\text{depth}(\langle \det(f_1^T \ \dots \ f_{m-1}^T \ f_m^T), \det(f_1^T \ \dots \ f_{m-1}^T \ f_{m+1}^T) \rangle) = 2$$

also  $\text{depth}(J) \geq 2$ .

Beweis: [5]

**Satz 70** Sei  $R$  ein noetherscher Ring. Sei  $h : R^{m+1} \rightarrow R^{m-1}$  eine Abbildung von freien  $R$ -Moduln und  $\text{rank}(h) = m - 1$ . Sei  $\text{depth}(I_{m-1}(h)) = 3$ . Dann hat  $I_{m-1}(h)$  eine freie Auflösung der Form

$$0 \rightarrow R^{\frac{m(m-1)}{2}} \rightarrow R^{(m-1)(m+1)} \rightarrow R^{\frac{m(m+1)}{2}} \rightarrow I_{m-1}(h) \rightarrow 0$$

Beweis: Spezialfall des Eagon-Northcott-Komplexes, [11], A2.6.1.

**Definition 71** Sei  $M$  ein  $R$ -Modul. Die **projektive Dimension**  $\text{pd}(M)$  von  $M$  ist definiert als das Minimum der Längen von projektiven Auflösungen von  $M$  und  $\text{pd}(M) := \infty$  falls  $M$  keine projektive Auflösung hat.

**Satz 72** Sei  $R$  ein graduerter Ring und  $M$  ein endlich erzeugter graduerter  $R$ -Modul. Dann ist  $\text{pd}(M)$  gleich der Länge jeder minimalen freien Auflösung von  $M$ .

Beweis: [11], Corollary 19.5.

**Definition 73** Sei  $R$  ein noetherscher Ring. Sei  $M \neq 0$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul.  $M$  heißt **perfekt** genau dann, wenn  $\text{pd}(M) = \text{grade}(M)$ .

**Satz 74** Ist  $M$  ein perfekter  $R$ -Modul, dann gilt  $\text{depth}(p) = \text{depth}(p, R) = \text{grade}(M)$  für alle Primideale  $p \in \text{Ass}(M)$ .

Insbesondere gilt für ein Ideal  $J \subset R$  mit  $R/J$  perfekt, daß

$$\text{depth}(p) = \text{grade}(R/J) = \text{depth}(J) \text{ für alle } p \in \text{Ass}(R/J) = \text{Ass}(J)$$

Beweis: [7], 1.4.15. (eine Folgerung aus der Auslander-Buchsbaum-Formel).

**Definition 75** Sei  $(R, m)$  ein noetherscher lokaler Ring. Ein endlicher erzeugter  $R$ -Modul  $M \neq 0$  heißt **Cohen-Macaulay-Modul** genau dann, wenn  $\text{depth}(m, M) = \dim(M)$ . Ist  $R$  aufgefaßt als  $R$ -Modul ein Cohen-Macaulay-Modul, dann heißt  $R$  **Cohen-Macaulay-Ring**. Allgemein:

Sei  $R$  ein noetherscher Ring. Ein endlicher erzeugter  $R$ -Modul  $M \neq 0$  heißt **Cohen-Macaulay-Modul** genau dann, wenn  $M_m$  ein Cohen-Macaulay-Modul ist für alle maximalen Ideale  $m \in \text{Supp}(M)$ . Ist  $R$  aufgefaßt als  $R$ -Modul ein Cohen-Macaulay-Modul, dann heißt  $R$  **Cohen-Macaulay-Ring**.

**Satz 76** Sei  $(R, m)$  ein noetherscher lokaler Ring und  $M$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul mit  $\text{pd}(M) < \infty$ . Dann gilt:

$M$  ist perfekt  $\Leftrightarrow M$  ist Cohen-Macaulay

Beweis: [7], 2.1.5.

### 11.3.2 Die Auflösung des adjungierten Ideals einer ebenen rationalen Kurve

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(K) = 0$ ,  $C = V_K(f) \subset \mathbb{P}_K^2$  eine irreduzible, projektive Kurve,  $f \in R := K[X_0, X_1, X_2]$  homogen,  $\deg(f) = n \geq 3$ , und  $p(C) = 0$ . Sei  $\mathfrak{G}$  das Gorenstein-adjungierte Ideal von  $C$ .

Sei  $A := R/\mathfrak{G}$  und  $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ .  $A_0 = K$ .  $A_i$  ist ein  $K$ -Vektorraum.

Die Hilbertfunktion ist  $H(i, A) = \dim_K(A_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ .

**Lemma 77**  *$A$  ist ein 1-dimensionaler graduierter Cohen-Macaulay-Ring und  $A$  ist endlich erzeugt von  $A_1$  als  $K$ -Algebra.*

**Lemma 78** *Sei  $B = \sum_{i=0}^{\infty} B_i$  ein 1-dimensionaler graduierter Cohen-Macaulay-Ring,  $B_0 = K$ ,  $K$  ein unendlicher Körper und  $B$  sei endlich erzeugt von  $B_1$  als  $K$ -Algebra. Dann gilt:*

- a  $B = K[x_0, \dots, x_m]/J$  wobei  $J \subset K[x_0, \dots, x_m]$  ist ein ungemischtes homogenes Ideal mit  $\text{height}(J) = m$ .
- b Gilt für  $i_0 \in \mathbb{N}_0$ , daß  $\dim_K(B_{i_0}) = \dim_K(B_{i_0+1})$ , dann gilt  $\dim_K(B_i) = \dim_K(B_{i+1}) \forall i \geq i_0, i \in \mathbb{N}_0$ .
- c Sei  $J = J_d \oplus J_{d+1} \oplus \dots$  mit  $J_d \neq (0)$  und  $t := \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \dim_K(B_i) = \dim_K(B_{i-1})\}$ . Dann gilt  $J =_K \langle J_d, \dots, J_t \rangle$ .

*Beweis:* [14]

**Satz 79** *Es gilt:*

- a  $H(r, A) = \begin{cases} \frac{(r+2)(r+1)}{2} & \text{für } r = 0, \dots, n-3 \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2} & \text{für } r \geq n-3 \end{cases}$
- b  $\dim(\mathfrak{G}_r) = \frac{(r+2)(r+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  für  $r \geq n-2$   
insbesondere:  $\dim_K(\mathfrak{G}_{n-2}) = n-1$
- c  $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{G}_{n-2} \rangle$
- d  $\dim(\mathfrak{G}_{n-2}) = \dim(\mathcal{A}_{n-2}) + 1 = n-1$   
 $\dim(\mathfrak{G}_{n-1}) = \dim(\mathcal{A}_{n-1}) + 1 = 2(n-1) + 1$

**Beweis.** Folgt sofort aus Satz 18 oder direkt:

Nach Abschnitt 6 haben wir wegen  $p(C) = 0$ , daß

$$\dim(\mathfrak{G}_r) \geq \dim(\mathcal{A}_r) + 1 = r \cdot n - (n-1)(n-2) + 1 \quad \forall r \geq n-2$$

Insbesondere ist

$$\dim(\mathfrak{G}_{n-2}) \geq \dim(\mathcal{A}_{n-2}) + 1 = n-1$$

Da nach Abschnitt 6 außerdem  $\dim(\mathfrak{G}_r) = 0$  ist für  $r \leq n - 3$ , hat man

$$\dim(A_r) = \dim(R_r) - \dim(\mathfrak{G}_r) = \frac{(r+2)(r+1)}{2} \text{ für } r = 0, \dots, n-3$$

insbesondere

$$\dim(A_{n-3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Wäre  $\dim(A_{n-2}) > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ , dann wäre

$$\begin{aligned} n-1 &\leq \dim(\mathfrak{G}_{n-2}) = \dim(R_{n-2}) - \dim(A_{n-2}) \\ &< \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \\ &= n-1 \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Damit gilt  $H(n-3, A) = H(n-2, A)$  und damit ist nach Satz 78(b)

$$H(r, A) = H(n-2, A) = H(n-3, A) \quad \forall r \geq n-3$$

also insgesamt

$$H(r, A) = \begin{cases} \frac{(r+2)(r+1)}{2} & \text{für } r = 0, \dots, n-3 \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2} & \text{für } r \geq n-3 \end{cases}$$

insbesondere  $\dim(\mathfrak{G}_r) = \frac{(r+2)(r+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  für  $r \geq n-2$ .

Außerdem ist

$$\min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \dim_K(A_i) = \dim_K(A_{i-1})\} = n-2$$

und damit  $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{G}_{n-2} \rangle$  mit Satz 78(c). ■

**Satz 80** *Das adjungierte Ideal  $\mathfrak{G}$  hat eine minimale graduierte freie Auflösung der Form*

$$0 \rightarrow R(-(n-1))^{n-2} \xrightarrow{d_1} R(-(n-2))^{n-1} \xrightarrow{d_0} \mathfrak{G} \rightarrow 0$$

*Ist  $k$  ein Körper, sodaß  $K$  ein Oberkörper von  $\bar{k}$  ist, und  $f \in S = k[X_0, X_1, X_2]$ , dann gibt es eine Basis von  $\mathfrak{G}_{n-2}$  aus Elementen von  $S$  gemäß Abschnitt 11.1, und  $d_0, d_1$  können so gewählt werden, daß sie Einträge in  $S$  haben.*

**Beweis.** Wegen  $p(C) = 0$  liefert Satz 79, daß  $\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{G}_{n-2} \rangle$  und  $\dim(\mathfrak{G}_{n-2}) = n-1$ . Sei also  $\mathfrak{G} = \langle G_0, \dots, G_{n-2} \rangle$  mit  $\deg(G_i) = n-2$ . Es ist  $\text{depth}(\mathfrak{G}) \geq 2$  und  $\text{depth}(\mathfrak{G}) = 2$ , da  $\text{Sing}(C) \subset V(\mathfrak{G})$ . Da  $R/\mathfrak{G}$  perfekt ist, ist

$$\text{pd}(R/\mathfrak{G}) = \text{grade}(R/\mathfrak{G}) = \text{depth}(\mathfrak{G}) = 2$$

Damit hat  $\mathfrak{G}$  eine minimale graduierte freie Auflösung, der Form

$$0 \rightarrow R^m \xrightarrow{d_1} R^{n-1} \xrightarrow{d_0} R$$

Mit Satz 64 gilt  $\text{rank}(d_0) + \text{rank}(d_1) = \text{rank}(R^{n-1}) = n-1$  und damit  $\text{rank}(d_1) = n-2$ . Außerdem  $\text{rank}(d_1) = m$ .

Nach Satz 68 gibt es ein  $R$ -reguläres Element  $a$  mit  $\mathfrak{G} = aI_n(d_1)$  und damit muß  $a \in K \setminus \{0\}$  sein und  $d_1$  ausschließlich lineare Einträge haben. ■

### 11.3.3 Spezialfall: Die Auflösung des adjungierten Ideals einer ebenen rationalen Kurve mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten

Die im letzten Abschnitt gezeigten Sätze 79 und 80 sieht man für eine ebene rationale Kurve mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten auch auf die folgende elementare Weise. Dabei ist interessant, daß die Singularitäten in generischer  $s$ -Position liegen ( $s$  die Anzahl der Doppelpunkte).

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(K) = 0$  und  $C = V(f) \subset \mathbb{P}_K^2$  eine irreduzible projektive Kurve,  $f \in K[X_0, X_1, X_2]$  homogen,  $\deg(f) = n$ , mit

- $p(C) = 0$
- $n \geq 3$
- $C$  habe nur gewöhnliche Doppelpunkte  $\{Q_1, \dots, Q_s\}$  ( $Q_i \neq Q_j \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, s$ )

**Berechnung der Hilbertfunktion der Singularitäten von  $C$**  Es gilt für eine irreduzible ebene Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten der Multiplizität  $r_i$ , daß

$$p(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{i=1}^s \frac{r_i(r_i-1)}{2}$$

Da  $r_i = 2 \forall i = 1, \dots, s$  und  $p(C) = 0$  gilt:

$$s = \sum_{i=1}^s \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

**Das Ideal von  $s$  Punkten** Im folgenden seien  $\{P_1, \dots, P_s\}$  ( $P_i \neq P_j \forall i \neq j, i, j = 1, \dots, s$ ) Punkte  $P_i \in \mathbb{P}_K^2, i = 1, \dots, s$  und sei  $K = \overline{K}$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Seien  $h_1, \dots, h_s \subset R$  die zu  $P_1, \dots, P_s$  korrespondierenden maximalen Ideale und sei

$$I := h_1 \cap \dots \cap h_s$$

Sei  $I = I_d \oplus I_{d+1} \oplus \dots$  mit  $I_d \neq (0)$ .

$$A := R/I$$

**Lemma 81**  $A$  ist ein 1-dimensionaler graduerter Cohen-Macaulay-Ring und  $A$  ist endlich erzeugt von  $A_1$  als  $K$ -Algebra.

*Beweis:* [14]

Sei  $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$  mit  $A_0 = K$ .  $A_r$  ist ein  $K$ -Vektorraum.

Die Hilbertfunktion ist  $H(i, A) = \dim_K(A_i), i \in \mathbb{N}_0$ .

**Lemma 82** Sei  $t_r := \dim R_r = \frac{(r+2)(r+1)}{2}$  und sei  $G_r \in K_{s,t_r}$  definiert durch  $(G_r)_{i,j} := F_j(P_i)$  wobei  $F_j, j = 1, \dots, \frac{(r+2)(r+1)}{2}$  die verschiedenen Monome vom Grad  $r$  in  $K[X_0, X_1, X_2]$  seien. Dann gilt:

$$a \dim_K (R_r) - \text{rank} (G_r) = \dim_K (I_r)$$

$$b \dim_K (A_r) = \dim_K (R_r) - \dim_K (I_r) = \frac{(r+2)(r+1)}{2} - \dim_K (I_r)$$

$$c H(r, A) = \dim_K (A_r) = \text{rank} (G_r) \leq \min \left\{ s, \frac{(r+2)(r+1)}{2} \right\}$$

**Beweis.**

$$a \text{ Betrachte das lineare Gleichungssystem } G_r l = 0 \in K_{t_r} \text{ mit } l = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{t_r} \end{pmatrix} \in$$

$K_{t_r}$  und den  $K$ -Vektorraum der Lösungen  $L_r = \{l \in K_{t_r} \mid G_r l = 0\}$ .

Dann gilt  $\dim_K (L_r) = t_r - \text{rank} (G_r)$ . Außerdem hat man einen  $K$ -Vektorraum-Isomorphismus

$$\Phi : L_r \longrightarrow I_r, l \longmapsto (F_1, \dots, F_{t_r}) l. \text{ Also gilt } \dim_K (I_r) = \dim_K (L_r) = t_r - \text{rank} (G_r).$$

b Für den Quotientenvektorraum  $A_r = R_r/I_r$  gilt, da  $\dim_K (R_r) < \infty$ , daß  $\dim_K (A_r) = \dim_K (R_r/I_r) = \dim_K (R_r) - \dim_K (I_r)$ .

c Folgt sofort aus (a) und (b):  $H(r, A) = \dim_K (A_r) \stackrel{b}{=} \dim_K (R_r) - \dim_K (I_r) \stackrel{a}{=} \dim_K (I_r) + \text{rank} (G_r) - \dim_K (I_r) = \text{rank} (G_r)$ .

$$\text{Da } G_r \in K_{s, t_r} \text{ ist klar, daß } \text{rank} (G_r) \leq \min \left\{ s, \frac{(r+2)(r+1)}{2} \right\}.$$

■

**Definition 83 (generische  $s$ -Position)** Man sagt,  $P_1, \dots, P_s$  liegen in **generischer  $s$ -Position** genau dann, wenn  $H(r, A) = \min \left\{ s, \frac{(r+2)(r+1)}{2} \right\}$ .

**Anwendung auf die Singularitäten von  $C$**

**Satz 84** Man betrachte nun die Singularitäten von  $C$ , also  $P_i := Q_i, i = 1, \dots, s$  und  $s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . Dann gilt:

- $I = \mathfrak{N} = \mathfrak{G}$
- $I =_R \langle I_{n-2} \rangle$
- $\dim_K (I_{n-2}) = n - 1$
- $H(r, A) = \begin{cases} \frac{(r+2)(r+1)}{2} & \text{für } r = 0, \dots, n - 3 \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2} & \text{für } r \geq n - 3 \end{cases}$
- $Q_1, \dots, Q_s$  liegen in generischer  $s$ -Position

**Beweis.**  $C$  hat keine Adjungierten vom Grad  $n - 3$ . Also ist

$$I_j = (0) \quad \forall j = 0, \dots, n - 3 \tag{4}$$

Da  $t_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$  und  $s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  also  $\text{rank}(G_{n-2}) \leq \min \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right\} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = s$ , gilt mit Lemma 82a

$$\dim_K(I_{n-2}) = \dim_K(R_{n-2}) - \text{rank}(G_{n-2}) \geq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1,$$

insbesondere  $I_{n-2} \neq (0)$ . Mit (4) gilt also:

$$I = I_{n-2} \oplus I_{n-1} \oplus \dots \text{ und } I_{n-2} \neq (0)$$

Nach Lemma 82b folgt:

$$\dim_K(A_r) = \dim_K(R_r) - \dim_K(I_r) = \frac{(r+2)(r+1)}{2} \text{ f\"ur } r = 0, \dots, n-3 \quad (5)$$

insbesondere

$$\dim_K(A_{n-3}) = \dim_K(R_{n-3}) - \dim_K(I_{n-3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = s \quad (6)$$

Außerdem gilt  $\frac{(r+2)(r+1)}{2} \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} = s$  für  $r \geq n-3$  also nach Lemma 82c

$$\dim_K(A_r) \leq \min \left\{ s, \frac{(r+2)(r+1)}{2} \right\} = s \text{ f\"ur } r \geq n-3 \quad (7)$$

Da für die Hilbertfunktion gilt

$$\dim_K(A_r) = H(r, A) \leq H(r+1, A) = \dim_K(A_{r+1}) \quad \forall r \in \mathbb{N}_0$$

folgt mit (5) und (6) und (7), daß

$$H(r, A) = \dim_K(A_r) = \begin{cases} \frac{(r+2)(r+1)}{2} & \text{f\"ur } r = 0, \dots, n-3 \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2} & \text{f\"ur } r \geq n-3 \end{cases}$$

Mit Lemma 82b folgt

$$\dim_K(I_{n-2}) = \dim_K(R_r) - \dim_K(A_r) = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1$$

Nach Definition 83 liegen die Singularitäten von  $C$  also in generischer  $s$ -Position. Mit Lemma 78c und Lemma 81 folgt, da

$$t = \min \{i \in \mathbb{N}_0 \mid \dim_K(A_i) = \dim_K(A_{i-1})\} = n-2$$

daß  $I =_R \langle I_{n-2} \rangle$ . ■

## Berechnung einer freien Auflösung des adjungierten Ideals von $C$

### Freie Auflösung des Ideals von $s$ Punkten in generischer $s$ -Position

**Satz 85** Sei  $d := \min \{t \in \mathbb{N}_0 \mid I_t \neq (0)\}$  und seien  $P_1, \dots, P_s$  in generischer  $s$ -Position.

- Dann hat  $I$  eine graduierte minimale freie Auflösung der Form:

$$0 \rightarrow R(-(d+1))^{\alpha_1} \oplus R(-(d+2))^{\beta_1} \xrightarrow{d_1} R(-d)^{\alpha_0} \oplus R(-(d+1))^{\beta_0} \xrightarrow{d_0} I \rightarrow 0$$

- Gilt  $s = \binom{d+1}{2}$  dann gilt:  
 $\alpha_i = \binom{d+1}{d+i} \binom{d+i-1}{i}$  und  $\beta_i = 0$  für  $i = 0, 1$

Beweis: [27]

### Anwendung auf die Singularitäten von $C$

**Satz 86** Man betrachte nun die Singularitäten von  $C$ , also  $P_i := Q_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  und  $s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ . Dann hat  $I$  eine graduierte minimale freie Auflösung der Form:

$$0 \rightarrow R(-(n-1))^{n-2} \xrightarrow{d_1} R(-(n-2))^{n-1} \xrightarrow{d_0} I \rightarrow 0 \quad (8)$$

**Beweis.** In Satz 85 gilt  $d = n - 2$ , also  $s = \binom{d+1}{2}$  und

$$\alpha_i = \binom{d+1}{d+i} \binom{d+i-1}{i} = \binom{n-1}{n-2+i} \binom{n-3+i}{i} = \begin{cases} n-1 & \text{für } i=0 \\ n-2 & \text{für } i=1 \end{cases}$$

■

### 11.3.4 Berechnung des adjungierten Ideals aus einer freien Auflösung des Jacobiideals

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(K) = 0$ . Im folgenden wird eine projektive Kurve  $C = V_K(f) \subset \mathbb{P}_K^2$ ,  $f \in K[X_0, X_1, X_2]$  homogen, irreduzibel,  $\deg(f) = n$ , betrachtet mit

- $p(C) = 0$
- $n \geq 3$
- $C$  habe nur gewöhnliche Doppelpunkte  $\{Q_1, \dots, Q_s\}$  ( $Q_i \neq Q_j \forall i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, s$ )

Das adjungierte Ideal  $I := \mathfrak{G}$  von  $C$  hat nach Satz 80 eine minimale graduierte freie Auflösung folgender Form

$$0 \rightarrow R(-(n-1))^{n-2} \xrightarrow{d_1} R(-(n-2))^{n-1} \xrightarrow{d_0} I \rightarrow 0 \quad (9)$$

Folgender Satz gibt ein Verfahren zur Berechnung des adjungierten Ideals von  $C$ :

**Satz 87** Sei  $C = V(f)$  eine irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad  $n \geq 3$  mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten und mit  $p(C) = 0$ . Sei  $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \right\rangle$  das Jacobiideal von  $C$  und sei  $I$  das adjungierte Ideal von  $C$ , d.h. das Ideal der Singularitäten  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  von  $C$ .

Dann hat  $J_f$  eine graduierte freie Auflösung der Form:

$$0 \rightarrow R(-2(n-1)-1)^{n-1} \xrightarrow{h_2} R(-2(n-1))^{n+1} \xrightarrow{h_1} R(-(n-1))^3 \xrightarrow{h_0} J_f \rightarrow 0 \quad (10)$$

Der Grad  $n-2$  Teil von  $\ker(h_2 \otimes R/J_f)$  wird erzeugt von Vektoren  $\begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_{n-1} \end{pmatrix}$ ,

wobei  $\bar{w}_i$  das Bild von  $w_i \in R$  in  $R/J_f$  sei und  $\deg(w_i) = n-2$ . Es gilt  $\langle w_1, \dots, w_{n-1} \rangle = I$ , also das adjungierte Ideal, und es gibt keine erzeugenden Vektoren von kleinerem Grad.

Ist  $k$  ein Körper mit  $\text{char}(k) = 0$ , sodaß  $K$  ein Oberkörper von  $\bar{k}$  ist, und  $f \in S = k[X_0, X_1, X_2]$ , dann wird  $J_f$  von  $\frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \in S$  erzeugt, und bei einer Berechnung von (10) können  $h_0, h_1, h_2$  so gewählt werden, daß sie Einträge in  $S$  haben.

**Beweis.**

1. Betrachte die Auflösung (9) von  $I$ :

Schreibe  $d_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_{n-1}^T \end{pmatrix}}_{n-2}$ . Sei

$$v_j = (-1)^j (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{j-1} & b_{j+1} & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

und sei  $v := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$ . Dann gilt also nach Satz 68, daß mit einem

$$e \in K \setminus \{0\} \text{ gilt } I = eI_{n-2}(d_1) = I_{n-2}(d_1) = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle.$$

2. Sei  $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \right\rangle$  das Jacobiideal von  $C$ . Da  $\frac{\partial f}{\partial X_i}(Q_j) = 0 \forall i = 0, 1, 2$  und  $j = 1, \dots, s$  gilt  $\frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \in I$ .

Da  $\deg\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right) = 1 + \deg(v_l) \forall i = 1, 2, 3$  und  $l = 1, \dots, n-1$  gibt es also  $a_0 = \begin{pmatrix} a_{0,1} & \dots & a_{0,n-1} \end{pmatrix}$ ,  $a_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} a_{2,1} & \dots & a_{2,n-1} \end{pmatrix} \in R^{n-1}$  mit linearen Einträgen, sodaß für  $i = 0, 1, 2$  gilt:

$$\det \begin{pmatrix} b_1^T & & \\ \vdots & a_i^T & \\ \underbrace{b_{n-1}^T}_{n-1} & & \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} (-1)^{j+n-1} \det \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{j-1} & b_{j+1} & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix} = a_i v = \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

Setze  $A := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ . Betrachte nun die Abbildung

$$h_2 = \begin{pmatrix} d_1^T \\ A \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{n-1}$$

also  $h_2 : R^{n-1} \rightarrow R^{n+1}$ . Der Grad  $n-2$  Teil von  $\ker(h_2 \otimes R/J_f)$  hat  $\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_{n-1} \end{pmatrix} \in R^{n-1}$  als Erzeuger, wobei  $\bar{v}_i$  die Äquivalenzklasse von  $v_i$  in

$R/J_f$  bezeichne, denn  $Av = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_0} \\ \frac{\partial f}{\partial X_1} \\ \frac{\partial f}{\partial X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{J_f}$  und wegen der

Auflösung (9) von  $I$  gilt  $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \in \ker(d_1^T)$ .

Verwende nun  $h_2 : R^{n-1} \rightarrow R^{n+1}$  um eine Auflösung von  $J_f$  gemäß Satz 69 zu konstruieren (also in der Notation des Satzes  $m = n-1$ ). Dazu brauchen wir:

3. Es gilt  $\text{depth}(I(h_2)) \geq 3$ , denn:

Sei  $P \in \mathbb{P}_K^2$  und  $P \notin \{Q_i \mid i = 1, \dots, s\}$ . Dann gilt  $\frac{\partial f}{\partial X_0}(P) \neq 0$  oder  $\frac{\partial f}{\partial X_1}(P) \neq 0$  oder  $\frac{\partial f}{\partial X_2}(P) \neq 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \in I(h_2)$ .

Sei  $P \in \{Q_i \mid i = 1, \dots, s\}$  einer der Doppelpunkte. Nach einem Koordinatenwechsel kann man annehmen, daß  $P = (1 : 0 : 0)$ :

$P$  ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt, also hat  $f$  die Form  $f = f_2 + \dots + f_n$  mit  $\deg(f_i) = i$  für  $i = 2, \dots, n$  und  $f_2 = (\alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2)(\beta_1 X_1 - \beta_2 X_2)$  mit  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$  und  $(\alpha_1 : \alpha_2) \neq (\beta_1 : \beta_2)$  (denn der Doppelpunkt ist gewöhnlich). Nach einem Koordinatenwechsel im  $\mathbb{P}_K^2$  und Multiplikation von  $f$  mit einem Element aus  $K \setminus \{0\}$  kann man annehmen daß  $f_2 = X_1 X_2$ . Seien  $x_1, x_2$  lokale Gleichungen von  $P$ . Sei  $g := f(1, x_1, x_2)$  und  $g_2 := f_2(1, x_1, x_2)$ . Damit gilt  $\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = x_2, \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = x_1$ . Da  $\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \rangle / m_{\mathbb{P}_K^2, P}^2 = \langle \frac{\partial g_2}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \rangle / m_{\mathbb{P}_K^2, P}^2 = m_{\mathbb{P}_K^2, P} / m_{\mathbb{P}_K^2, P}^2$  gilt mit dem Lemma von Nakayama ([11], Corollary 4.8.), daß  $m_{\mathbb{P}_K^2, P} = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \rangle$ .

Betrachte die Auflösung

$$0 \rightarrow R^{n-2} \xrightarrow{d_1} R^{n-1} \xrightarrow{d_0} I \rightarrow 0$$

Lokalisieren in  $P$  liefert nach einem Basiswechsel in  $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P})^{n-2}$  und

$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P})^{n-1}$  die nichtminimale Auflösung

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P})^{n-2} \xrightarrow{d_{1,P}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P})^{n-1} \xrightarrow{d_{0,P}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P} \langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow 0$$

$$\text{mit } d_{0,P} = (0, \dots, 0, x_1, x_2) \text{ und } d_{1,P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -x_2 \\ 0 & \dots & 0 & x_1 \end{pmatrix}}_{n-2} \in (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P})_{n-1, n-2}.$$

Betrachte nun  $h_2$  lokal in  $P$ : Nach einem Basiswechsel hat  $h$  die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -x_2 & x_1 \\ 0 & \dots & 0 & r_1 & t_1 \\ 0 & \dots & 0 & r_2 & t_2 \\ 0 & \dots & 0 & r_3 & t_3 \end{pmatrix} \in (\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P})_{n-1, n+1}$$

mit  $r_1, t_1, r_2, t_2, r_3, t_3 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P}$  und es gilt

$$-x_2 t_1 - x_1 r_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -x_2 & x_1 \\ 0 & \dots & 0 & r_1 & t_1 \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

$$-x_2 t_2 - x_1 r_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -x_2 & x_1 \\ 0 & \dots & 0 & r_2 & t_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

also  $\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 & -t_1 \\ -r_2 & -t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Da  $m_{\mathbb{P}_K^2, P} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P} \langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \rangle$

ist  $\begin{pmatrix} -r_1 & -t_1 \\ -r_2 & -t_2 \end{pmatrix}$  invertierbar, also  $\det \begin{pmatrix} -r_1 & -t_1 \\ -r_2 & -t_2 \end{pmatrix}$  eine Einheit in  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P}$  und damit auch

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r_1 & t_1 \\ 0 & \dots & 0 & r_2 & t_2 \end{pmatrix} \in I(h_2) \mathcal{O}_{\mathbb{P}_K^2, P}$$

eine Einheit, also gibt es ein  $l \in I(h_2)$  mit  $l(P) \neq 0$ .

Insgesamt gibt es also für jedes  $P \in \mathbb{P}_K^2$  ein  $l \in I(h_2)$  mit  $l(P) \neq 0$  und damit  $\sqrt{I(h_2)} = \langle X_0, X_1, X_2 \rangle$  und damit

$$\text{depth}(I(h_2)) = \text{depth}\left(\sqrt{I(h_2)}\right) = \text{depth}(\langle X_0, X_1, X_2 \rangle) = 3$$

4. Da  $\text{depth}(I(h_2)) = 3$  und  $\text{rank}(h_2) = n - 1$  (wegen  $\frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \in I_{n-1}(h_2)$ ) liefert der Eagon-Northcott-Komplex gemäß Satz 70 eine freie Auflösung von  $I(h_2)$  der Form

$$0 \rightarrow R^{\frac{n(n-1)}{2}} \rightarrow R^{(n-1)(n+1)} \rightarrow R^{\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow I(h_2) \rightarrow 0$$

Da  $h_2$  lineare Einträge hat ist  $I(h_2) = \langle (I(h_2))_{n-1} \rangle$ . Alle  $(n-1) \times (n-1)$ -Minoren von  $h_2$  sind linearunabhängig und  $\dim((I(h_2))_{n-1}) = \frac{n(n+1)}{2}$ . Da  $I(h_2) \subset \langle X_0, X_1, X_2 \rangle^{n-1}$  und  $\dim\left(\left(\langle X_0, X_1, X_2 \rangle^{n-1}\right)_{n-1}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$  gilt  $I(h_2) = \langle X_0, X_1, X_2 \rangle^{n-1}$ .

5. Sei  $g = (g_i)_i \in R^{n-1}$  ein Repräsentant eines erzeugenden Vektors des Grad  $n-2$  Teils von  $\ker(h_2 \otimes R/J_f)$ , d.h.  $h_2 g = u$  mit  $u = (u_j)_j \in R^{n+1}$  und  $u_j \in (J_f)_{n-1} \forall j = 1, \dots, n+1$  und  $\deg(g_i) = n-2 \forall i = 1, \dots, n-1$ . Zeige, daß  $\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle = I$ .

- (a) Nach Zeilentransformationen angewendet auf  $h_2$  erhält man eine andere darstellende Matrix  $\widetilde{h}_2$  des Homomorphismus  $R^{n-1} \rightarrow R^{n+1}$  aus der Auflösung (10) mit

$$\widetilde{h}_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 & \dots & \widetilde{b}_{n-1} \\ & \widetilde{a}_0 & \\ & \widetilde{a}_1 & \\ & \widetilde{a}_2 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 & \dots & \widetilde{b}_{n-1} \\ & \widetilde{a}_0 & \\ & \widetilde{a}_1 & \\ & \widetilde{a}_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

mit  $\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_{n-1} \in R^{n-2}, \widetilde{a}_0^T, \widetilde{a}_1^T, \widetilde{a}_2^T \in R^{n-1}, \widetilde{a}_0 = (\widetilde{a}_{0,1} \dots \widetilde{a}_{0,n-1})$ ,  $\widetilde{a}_1 = (\widetilde{a}_{1,1} \dots \widetilde{a}_{1,n-1})$ ,  $\widetilde{a}_2 = (\widetilde{a}_{2,1} \dots \widetilde{a}_{2,n-1})$ , wobei  $\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_{n-1}$  und  $\widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$  lineare Einträge haben, und  $r_0, r_1, r_2 \in (J_f)_{n-1}$ . Sei

$$\widetilde{h} := \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 & \dots & \widetilde{b}_{n-1} \end{pmatrix} \in R_{n-2, n-1}$$

Es gilt

$$I_{n-2}(\widetilde{h}) \neq 0$$

denn wäre  $I_{n-2}(\tilde{h}) = 0$ , d.h. alle  $(n-2) \times (n-2)$ -Minoren von  $\tilde{h}$  gleich 0, dann wäre auch

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-1} \\ & \tilde{a}_i & \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}_{i,j} (-1)^{j+n-1} \underbrace{\det \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{j-1} & \tilde{b}_{j+1} & \dots & \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix}}_0 = 0$$

für alle  $i = 0, 1, 2$ . Nach Paragraph (4.) sind jedoch alle  $(n-1) \times (n-1)$ -Minoren von  $\tilde{h}_2$  linear unabhängig.

- (b) Wenn  $r_1, r_2, r_3$  nicht linearunabhängig sind, kann man annehmen, daß  $r_1 = 0$ . Dann gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-1} \\ & \tilde{a}_0 & \end{pmatrix}}_{=:\Psi} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also  $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} \in \ker(\Psi)$ . Jedoch ist nach Paragraph 4.  $\det(\Psi) \neq 0$

und damit müssen  $r_1, r_2, r_3$  linearunabhängig gewesen sein.

Wegen  $r_1, r_2, r_3 \in (J_f)_{n-1}$  und  $J_f = \langle (J_f)_{n-1} \rangle$  ist also  $\langle r_1, r_2, r_3 \rangle = J_f$ . Damit gilt

$$\text{depth}(\langle r_1, r_2, r_3 \rangle) = \text{depth}(J_f) \geq 2$$

Sei für  $i = 1, \dots, n-1$

$$h_i := (-1)^i (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{i-1} & \tilde{b}_{i+1} & \dots & \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix}$$

und sei  $g := ggT(h_1, \dots, h_{n-1})$  und sei  $c_i g := h_i$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Dann ist

$$\ker \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Da  $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix}$  gibt es ein  $u \in R_{\deg(g)}$  mit

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Damit hat man

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-1} \\ & \tilde{a}_0 & \\ & \tilde{a}_1 & \\ & \tilde{a}_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-1} \\ & \tilde{a}_0 & \\ & \tilde{a}_1 & \\ & \tilde{a}_2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

also werden  $r_1, r_2, r_3$  von  $u$  geteilt. Mit  $r'_i u := r_i$  ist

$$J_f = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle = u \langle r'_1, r'_2, r'_3 \rangle$$

Wäre  $\deg(u) > 0$ , dann wäre

$$\text{depth}(J_f) = \text{depth}(u \langle r'_1, r'_2, r'_3 \rangle) = 1$$

also ist  $u \in K \setminus \{0\}$ . Damit ist  $n - 2 = \deg(g_i) = \deg(c_i)$ , also  $\deg(g) = 0, g \in K \setminus \{0\}$ . Damit können wir annehmen, daß

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{n-1} \end{pmatrix}$$

Außerdem ist  $\text{depth}(\langle h_1, \dots, h_{n-1} \rangle) = \text{depth}(\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle) \geq \text{depth}(J_f) \geq 2$ . Mit Satz 65 gilt  $\text{depth} \langle h_1, \dots, h_{n-1} \rangle \leq 2$  und damit

$$\text{depth}(J_f) = \text{depth}(\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle) = \text{depth}(\langle h_1, \dots, h_{n-1} \rangle) = 2$$

Da  $\langle h_1, \dots, h_{n-1} \rangle = I_{n-2}(\tilde{h})$  hat man mit Satz 68 eine minimale freie Auflösung

$$0 \rightarrow R^{n-2} \xrightarrow{\tilde{h}} R^{n-1} \xrightarrow{(h_1, \dots, h_{n-1})} I_{n-2}(\tilde{h}) \rightarrow 0$$

(c) Da  $J_f = \langle r_1, r_2, r_3 \rangle$  und

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_0 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

ist  $J_f \subset \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$

(d) Da  $\text{grade}(R/I_{n-2}(\tilde{h})) = \text{depth}(I_{n-2}(\tilde{h})) = 2$  und  $\text{pd}(R/I_{n-2}(\tilde{h})) = 2$  mit Satz 72, ist

$$\text{grade}(R/I_{n-2}(\tilde{h})) = 2 = \text{pd}(R/I_{n-2}(\tilde{h}))$$

und damit ist  $R/I_{n-2}(\tilde{h})$  perfekt. Mit Satz 74 hat man also  $\text{depth}(p) = \text{depth}(I_{n-2}(\tilde{h})) = 2 \forall p \in \text{Ass}(I)$ . Wäre also  $\langle X_0, X_1, X_2 \rangle \in \text{Ass}(I)$ , dann hätte man

$$3 = \text{depth}(\langle X_0, X_1, X_2 \rangle) = \text{depth}(I_{n-2}(\tilde{h})) = 2$$

ein Widerspruch. Damit ist  $I_{n-2}(\tilde{h}) = \overline{I_{n-2}(\tilde{h})}$ , wobei der Querstrich die Saturierung in  $\langle X_0, X_1, X_2 \rangle$  bezeichnet.

(e) Damit ist wegen  $I_{n-2}(\tilde{h}) = \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$

$$I = \overline{J_f} \subset \overline{\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle} = \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$$

Da  $\dim(I_{n-2}) = n - 1$  und  $\dim(\langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_{n-2}) \leq n - 1$  und  $I_{n-2} \subset \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_{n-2}$ , ist  $I_{n-2} = \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_{n-2}$ . Da  $I = \langle I_{n-2} \rangle$  und  $\langle g_1, \dots, g_{n-2} \rangle = \langle \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle_{n-2} \rangle$  ist  $I = \langle g_1, \dots, g_{n-1} \rangle$ .

6. Es kann keinen Repräsentanten  $g = (g_i)_i \in R^{n-1}$  eines erzeugenden Vektors von  $\ker(h_2 \otimes R/J_f)$  mit  $\deg(g_i) < n - 2$  geben, denn dann müßte  $h_2 g = u$  mit  $u = (u_j)_j \in R^{n+1}$  und  $u_j \in J_f$  sein, es ist aber  $\deg(u_j) < n - 1$ .

7. Es ist

$$\left\langle \det \begin{pmatrix} d_1^T \\ a_0 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} d_1^T \\ a_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} d_1^T \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \right\rangle = J_f$$

Da  $\text{depth}(I(h_2)) \geq 3$ ,  $\text{depth}(J_f) \geq 2$  und  $\text{rank}(h_2) = n - 1$ , gilt nach Satz 69, daß es eine Abbildung  $a : R^{n+1} \rightarrow (R^{n+1})^*$  gibt, sodaß mit der Projektion auf die letzten 3 Erzeuger  $b : (R^{n+1})^* \rightarrow R^3$  und  $h_1 := b \circ a$  und  $h_0 := \left( \bigwedge^{n-1} h_2^* \right) \circ \left( \bigwedge^2 b^* \right)$  der Komplex

$$0 \rightarrow R^{n-1} \xrightarrow{h_2} R^{n+1} \xrightarrow{h_1} R^3 \xrightarrow{h_0} J_f \rightarrow 0$$

eine freie Auflösung des Ideals  $J_f$  ist und  $h_1$  Einträge vom Grad  $n - 1$  hat.

Da je zwei minimale freie Auflösungen isomorph sind ([11], Theorem 20.2.), ist jede minimale freie Auflösung von  $J_f$  von dieser Form.

■

Mit Satz 87 ergibt sich folgender Algorithmus zur Berechnung des adjungierten Ideals:

**Algorithmus 88** Sei  $C = V_K(f)$ ,  $f$  irreduzibel, eine ebene Kurve mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten und  $p(C) = 0$ . Dabei sei  $f \in S := k[X_0, X_1, X_2]$  mit einem Unterkörper  $k \subset K$ .

- Man hat eine minimale freie Auflöung von  $J :=_S \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \right\rangle$ :

$$0 \rightarrow S^{n-1} \xrightarrow{h_2} S^{n+1} \xrightarrow{h_1} S^3 \xrightarrow{h_0} J \rightarrow 0$$

- Berechne den Kern von  $h_2 \otimes S/J$ , wobei nur der Grad  $n - 2$  Teil berechnet werden muß und es keine Erzeuger von niedrigerem Grad geben kann.
- Der Kern ist ein Untermodul von  $(S/J)^{n-1}$ . Grad  $n - 2$  Repräsentanten der Einträge jedes Basisvektors vom Grad  $n - 2$ , erzeugen das adjungierte Ideal von  $C$ .

### Alternativer Algorithmus

**Algorithmus 89** Sei  $C = V(f)$ ,  $f \in R = K[X_0, X_1, X_2]$ , eine irreduzible ebene projektive Kurve vom Grad  $n \geq 3$  mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten und mit  $p(C) = 0$ . Sei  $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \right\rangle$  das Jacobiideal von  $C$  und sei  $I$  das adjungierte Ideal von  $C$ . Folgender Algorithmus liefert ein minimales Erzeugendensystem des adjungierten Ideals  $I$ :

- Berechne die Syzygienmatrix  $h_1 \in R_{3,n+1}$  von  $\left( \frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \right)$
- Sei  $\tilde{h}_1 \in (R/J_f)_{3,n-2}$  eine Matrix in deren Spalten ein minimales Erzeugendensystem des  $R/J_f$ -Moduls erzeugt von den Spalten von  $h_1 \otimes R/J_f$  steht.
- Berechne die lineare Syzygienmatrix  $\tilde{h}_2 \in (R/J_f)_{n-2,n-1}$  von  $\tilde{h}_1$  und sei  $d_1 \in R_{n-1,n-2}$  die Matrix, deren Einträge die linearen Repräsentanten der Einträge von  $\tilde{h}_2^T$  sind. Schreibe  $d_1 =: \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_{n-1}^T \end{pmatrix}$  mit  $b_i \in R^{n-2}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . Sei

$$v_j := (-1)^j (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{j-1} & b_{j+1} & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

für  $j = 1, \dots, n-1$  und  $d_0 := (v_1, \dots, v_{n-1})$ . Dann ist

$$0 \rightarrow R^{n-2} \xrightarrow{d_1} R^{n-1} \xrightarrow{d_0} I \rightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung des adjungierten Ideals  $I$  von  $C$ , insbesondere ist  $I = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ .

Ist  $f \in S := k[X_0, X_1, X_2]$  mit einem Unterkörper  $k \subset K$ , dann kann man die  $h_1, d_1, v_j$  so berechnen, daß sie Einträge in  $S$  haben.

**Beweis.** Mit Satz 80 hat das adjungierte Ideal eine freie Auflösung der Form

$$0 \rightarrow R^{n-2} \xrightarrow{d_1} R^{n-1} \xrightarrow{d_0} I \rightarrow 0$$

und gemäß Satz 87 haben wir eine freie Auflösung von  $J_f$  der Form

$$0 \rightarrow R^{n-1} \xrightarrow{h_2} R^{n+1} \xrightarrow{h_1} R^3 \xrightarrow{h_0} J_f \rightarrow 0$$

Schreibe  $d_1 = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_{n-1}^T \end{pmatrix} \in R_{n-1,n-2}$ , wobei  $d_1$  lineare Einträge hat. Nach einem Basiswechsel in  $R^{n-1}$  und  $R^{n+1}$  können wir annehmen, daß:

$$h_2 = \begin{pmatrix} d_1^T \\ A \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{n-1}$$

wobei  $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $a_i$  lineare Einträge hat und  $\det \begin{pmatrix} d_1^T \\ a_i \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial X_i} =: f_i$  für  $i = 0, 1, 2$ , außerdem  $h_0 = (f_0, f_1, f_2)$  und

$$h_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} u_{0,1} & \dots & u_{0,n-2} & 0 & f_2 & -f_1 \\ u_{1,1} & \dots & u_{1,n-2} & -f_2 & 0 & f_0 \\ u_{2,1} & \dots & u_{2,n-2} & f_1 & -f_0 & 0 \end{pmatrix}}_{n+1}$$

Es gilt  $h_0 h_1 = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+1}$  und  $h_1 h_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n-1}$ . Sei  $u_i := (u_{i,1} \dots u_{i,n-2})$

für  $i = 0, 1, 2$ ,  $u := \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{u}_i := u_i \otimes R/J_f$ ,  $\tilde{h}_1 := \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix}$ .

Setze  $\tilde{h}_2 := (\tilde{b}_1 \dots \tilde{b}_{n-1})$  mit  $\tilde{b}_j := b_j \otimes R/J_f$ . In den Spalten von  $\tilde{h}_1$  steht ein minimales Erzeugendensystem des  $R/J_f$ -Moduls erzeugt von den Spalten von  $h_1 \otimes R/J_f$ . Setze  $J_0 := \langle f_1, f_2 \rangle$ ,  $J_1 := \langle f_0, f_2 \rangle$ ,  $J_2 := \langle f_0, f_1 \rangle$ . Da  $u_i b_j \in J_i \subset J_f$ , gilt

$$\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \dots & \tilde{b}_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{n-1} \text{ mod } J_f$$

Wenn man gezeigt hat, daß für einen Vektor  $p := \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-2} \end{pmatrix}$  mit linearen

Einträgen und  $up = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$  und  $s_0, s_1, s_2 \in J_f$  schon gilt, daß  $s_i \in J_i$  für  $i =$

$0, 1, 2$ , dann weiß man, daß  $\tilde{h}_2$  die lineare Syzygienmatrix von  $\tilde{h}_1$  ist. Betrachte also einen solchen Vektor:

Da  $(f_0, f_1, f_2)u = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-2}$  gilt auch  $(f_0, f_1, f_2)up = 0$ , d.h.  $s_0 f_0 + s_1 f_1 +$

$s_2 f_2 = 0$ . Da  $\deg(s_i) = n$ , schreibe  $s_i = l_{i,0} f_0 + l_{i,1} f_1 + l_{i,2} f_2$  mit  $l_{i,j} \in R$ , linear oder 0. Also  $l_{0,0} (f_0)^2 = (-s_1 - l_{0,1} f_0) f_1 + (-s_2 - l_{0,2} f_0) f_2$ , d.h. wenn man einen Punkt  $P$  hat mit  $f_1(P) = 0$  und  $f_2(P) = 0$ , dann ist entweder  $f_0(P) = 0$  oder  $l_{0,0}(P) = 0$ . Dies bedeutet, daß alle Schnittpunkte von  $V(f_1)$  und  $V(f_2)$  die keine Singularitäten von  $C$  sind, auf der Gerade  $V(l_{0,0})$  liegen, oder  $l_{0,0} = 0$  ist.

Ersetzt man  $f_0, f_1, f_2$  durch 3 generische Elemente von  $(J_f)_{n-1}$ , dann kann man annehmen, daß  $\langle f_0, f_1, f_2 \rangle = J_f$  und  $f_i, f_j$  eine  $R$ -Sequenz der Länge 2 ist für  $i \neq j$ . Ein generisches Element von  $(J_f)_{n-1}$  hat in jedem der Doppelpunkte von  $C$  genau Multiplizität 1 (Beweis: [4], Lemma 2.4). Sei  $P$  einer der gewöhnlichen Doppelpunkte von  $C$ , OE  $P = (1 : 0 : 0)$  und seien  $x_1, x_2$  lokale Gleichungen von  $P$ ,  $m_{\mathbb{P}^2, P} = \langle x_1, x_2 \rangle$ . Wie im Beweis von Satz 87(3.) ist

$m_{\mathbb{P}_K^2, P} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle = \langle f_1(1, x_1, x_2), f_2(1, x_1, x_2) \rangle$  mit  $g := f(1, x_1, x_2)$ , da  $P$  ein gewöhnlicher Doppelpunkt von  $C$  ist. Damit ist  $(J_i : I) = (J_i : I^\infty)$  und  $f_1$  und  $f_2$  haben mit Multiplizität gezählt mindestens  $(n-1)^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  Schnittpunkte auf der Geraden  $l_{0,0}$ , da  $C$  genau  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  gewöhnliche Doppelpunkte hat. Da für  $n \geq 3$  aber  $\frac{n(n-1)}{2} > n-1$  ist, kann dies nur möglich sein, wenn  $l_{0,0}$  ein gemeinsamer Teiler von  $f_1$  und  $f_2$  ist. Dann wäre aber  $\text{depth}(\langle f_1, f_2 \rangle) = 1$ , ein Widerspruch dazu, daß  $f_1, f_2$  eine  $R$ -Sequenz der Länge 2 ist. Schließlich weiß man, daß  $I(d_1) = I$  ist. ■

## 11.4 Berechnung des adjungierten Ideals mit Saturierung

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(K) = 0$ . Sei  $C = V(f)$ ,  $f \in K[X_0, X_1, X_2]$ ,  $f$  irreduzibel, eine ebene irreduzible projektive Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten  $P_{i,j}$  mit  $i = 2, \dots, s$  und  $j = 1, \dots, s_i$  wobei  $P_{i,j}$  mit  $j = 1, \dots, s_i$  jeweils Multiplizität  $i$  haben. Sei  $n := \deg(f) \geq 3$ . Es gilt also  $s \leq n-1$ .

Sei  $J_i := \left\langle \frac{\partial^{j+l+m} f}{\partial X_0^j \partial X_1^l \partial X_2^m} \mid j+l+m = i, j, l, m \in \mathbb{N}_0 \right\rangle$  für  $i = 1, \dots, s$ . Sei  $I_2 := (J_1 : J_2^\infty)$  und  $R_3 := (J_2 : I_2^\infty)$ . Dann gilt  $I(\{P_{2,j} \mid j = 1, \dots, s_2\}) = I_2$  und  $I(\{P_{i,j} \mid j = 1, \dots, s_i, i = 3, \dots, s\}) = R_3$ . Sei  $I_3 := (R_3 : J_3^\infty)$ . Dann gilt  $I(\{P_{3,j} \mid j = 1, \dots, s_3\}) = I_3$ . Induktiv:

$$\left. \begin{array}{l} R_2 := J_1 \\ I_i := (R_i : J_i^\infty) \\ A_i := \bigcap_{j=2}^i (I_j^{j-1}) \\ R_{i+1} := (J_i : A_i^\infty) \end{array} \right\} \text{ für } i = 2, \dots, s$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} I_i &= I(\{P_{i,j} \mid j = 1, \dots, s_i\}) \text{ für } i = 2, \dots, s \\ R_{i+1} &= I(\{P_{l,j} \mid j = 1, \dots, s_l, l = i+1, \dots, s\}) \text{ für } i = 1, \dots, s-1 \\ R_{s+1} &= \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

und  $A_s$  ist das adjungierte Ideal von  $C$ .

Alternativ kann man auch folgendermaßen vorgehen:

Stets ist  $J_{n-1} = \langle X_0, X_1, X_2 \rangle$ , denn eine Kurve vom Grad  $n$  kann keinen  $n$ -fach-Punkt haben. Sei  $l \in \{1, \dots, n-1\}$  minimal, sodaß  $\sqrt{J_l} = \langle X_0, X_1, X_2 \rangle$  (also  $l = s \geq 2$ ). Setze

$$\left. \begin{array}{l} B_l := \langle X_0, X_1, X_2 \rangle^{n-l} \\ I_i := (J_{i-1} : B_i^\infty) \\ B_{i-1} := B_i \cap (I_i^{i-1}) \end{array} \right\} \text{ für } i = l, \dots, 2$$

Dann gilt ebenfalls:

$$I_i = I(\{P_{i,j} \mid j = 1, \dots, s_i\}) \text{ für } i = 2, \dots, s$$

und  $B_1$  ist das adjungierte Ideal von  $C$ . Der Querstrich bezeichnet die Saturierung in  $\langle X_0, X_1, X_2 \rangle$ . Man kann oben  $B_{i-1} := B_i \cap I_i^{i-1}$  setzen, falls  $d_i(i-1) \leq n-2$ , wobei  $I_i = \langle (I_i)_{h_i}, \dots, (I_i)_{d_i} \rangle$ ,  $h_i \leq d_i$ .

Hat  $f$  Koeffizienten in einem Unterkörper  $k$  von  $K$ , dann kann man auch für die  $I_i, R_i, A_i, B_i$  Erzeuger in  $k[X_0, X_1, X_2]$  angeben und die Verfahren zur Berechnung von Saturierung und Durchschnitt liefern solche Erzeuger.

Insgesamt:

**Algorithmus 90** Sei  $k$  ein Körper mit  $\text{char}(k) = 0$  und  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von  $\bar{k}$ .  $C = V_K(f)$ ,  $f \in R := k[X_0, X_1, X_2]$ ,  $f$  irreduzibel, eine ebene irreduzible projektive Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten vom Grad  $n \geq 3$ . Folgender Algorithmus berechnet das adjungierte Ideal:

$$1. J_1 :=_R \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_0}, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \frac{\partial f}{\partial X_2} \right\rangle$$

$$2. i := 1$$

$$3. \text{ Solange } \sqrt{J_i} \neq \langle X_0, X_1, X_2 \rangle:$$

$$(a) i := i + 1$$

$$(b) J_i :=_R \left\langle \frac{\partial^{j+l+m} f}{\partial X_0^j \partial X_1^l \partial X_2^m} \mid j+l+m = i, j, l, m \in \mathbb{N}_0 \right\rangle$$

$$4. B := \langle X_0, X_1, X_2 \rangle^{n-i}$$

$$5. \text{ Solange } i > 0:$$

$$(a) I_i := (J_{i-1} : B^\infty)$$

$$(b) A := I_i^{i-1}$$

$$(c) \text{ Hat } A \text{ Erzeuger von Grad } > n - 2 \text{ dann } A := \bar{A}$$

$$(d) B := B \cap A$$

$$(e) i := i - 1$$

$$6. B \text{ ist das adjungierte Ideal und } I_i \text{ das Ideal der } i\text{-fach-Punkte von } C.$$

## 12 Praktische Darstellung von birationalen Transformationen

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(k) = 0$ . Seien  $X \subset \mathbb{P}_k^n$  und  $Y \subset \mathbb{P}_k^m$  projektive irreduzible Kurven.

Eine rationale Transformation  $\Phi : X \rightarrow Y$  ist eine Äquivalenzklasse von Paaren  $(U, \gamma)$  mit  $U \subset X$  offen und  $\gamma : U \rightarrow Y$  ein Morphismus, bezüglich der Äquivalenzrelation  $(U, \gamma) \sim (V, \eta) \Leftrightarrow \gamma|_{U \cap V} = \eta|_{U \cap V}$ . Es sei  $D(\Phi) := \bigcup_{(U, \gamma) \in \Phi} U$ .

Hat man ein  $(m+1)$ -Tupel  $(H_0, \dots, H_m)$  mit  $H_i \in k[X]$  im homogenen Koordinatenring von  $X$  alle homogen vom gleichen Grad, dann definiert dies einen Morphismus  $\gamma : U \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ ,  $x \mapsto (H_0(x) : \dots : H_m(x))$  mit  $U = X \setminus V(H_0, \dots, H_m)$ . Setze voraus, daß  $V := \gamma(U) \subset Y$  und  $\gamma : U \rightarrow V$  ein Isomorphismus ist. Man beachte, daß sich nicht jeder Morphismus in der Form  $x \mapsto (H_0(x) : \dots : H_m(x))$  darstellen läßt. Betrachte folgendes Beispiel:  $X = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subset \mathbb{P}_k^2$  und  $Y = \mathbb{P}_k^1$ .  $\gamma : X \rightarrow Y$  mit  $(x : y : z) \mapsto (x : z - y)$  für  $(x : y : z) \neq (0 : 1 : 1)$  und

$\gamma(0 : 1 : 1) := (1 : 0)$  ist ein Isomorphismus. Man hat  $\gamma(x : y : z) = (z + y : x)$  für  $(x : y : z) \neq (0 : -1 : 1)$  und  $\gamma(0 : -1 : 1) = (0 : 1)$ , da  $x^2 = (z - y)(z + y)$  auf  $X$ . Durch das Tupel  $(X, Z - Y)$  ist der Isomorphismus  $\gamma_0 : X \setminus \{(0 : 1 : 1)\} \rightarrow Y \setminus \{(1 : 0)\}$ ,  $(x : y : z) \mapsto (x : z - y)$  gegeben und durch  $(Z + Y, X)$  der Isomorphismus  $\gamma_1 : X \setminus \{(0 : -1 : 1)\} \rightarrow Y \setminus \{(0 : 1)\}$ ,  $(x : y : z) \mapsto (z + y : x)$ . Es gibt jedoch kein Tupel, das einen Morphismus  $X \rightarrow Y$  definiert. Man möchte jedoch gerne mit solchen Tupeln rechnen.

Dazu verwendet man, daß es für jede birationale Transformation  $\Phi : X \rightarrow Y$  Isomorphismen  $\gamma_0, \dots, \gamma_s \in \Phi$  gibt,  $\gamma_i : U_i \rightarrow V_i$ ,  $U_i \subset X$  offen,  $V_i \subset Y$  offen mit  $\gamma_i(x) := (H_0^i(x) : \dots : H_m^i(x))$ ,  $H_l^i(x) \in k[X]$  mit  $\bigcup_i U_i = D(\Phi)$ . Die birationale Transformation  $\Phi$  ist durch ein einziges solches Tupel  $(H_0^i, \dots, H_m^i)$  bestimmt.

Insbesondere kann man einen Isomorphismus  $\Phi : X \rightarrow Y$  als birationale Transformation mit  $D(\Phi) = X$  auffassen und damit  $\Phi$  durch eine Kollektion von Isomorphismen  $\gamma_i : U_i \rightarrow V_i$  mit  $\gamma_i(x) := (H_0^i(x) : \dots : H_m^i(x))$ ,  $H_l^i(x) \in k[X]$ ,  $i = 0, \dots, s$  mit  $\bigcup_i U_i = D(\Phi) = X$  repräsentieren. Im obigen Beispiel wäre also  $\gamma$  repräsentiert durch die Isomorphismen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ , die wiederum durch die Tupel  $(X, Z - Y)$  bzw.  $(Z + Y, X)$  dargestellt werden können und jedes der beiden Tupel ist ausreichend, um  $\gamma$  festzulegen.

Damit haben wir eine Rechenmethode zur Behandlung von birationalen Transformationen und insbesondere von Isomorphismen. Ist eine birationale Transformation  $\Phi : X \rightarrow Y$  gegeben durch einen Repräsentanten  $\gamma : U \rightarrow V$ ,  $x \mapsto (H_0(x) : \dots : H_m(x))$ ,  $\gamma$  Isomorphismus,  $H_i \in k[X]$  homogen vom gleichen Grad, der wiederum durch das Tupel  $(H_0, \dots, H_m)$  dargestellt wird, dann sind für uns folgende Fragestellungen interessant:

1. Gegeben  $I(X)$  berechne  $I(Y)$ :

Betrachte den Ringhomomorphismus

$$a : k[Y_0, \dots, Y_m] \rightarrow k[X_0, \dots, X_n] / I(X), Y_i \mapsto H_i$$

Dann ist

$$I(Y) = \ker(a)$$

unabhängig von dem Repräsentanten [17].

2. Berechne das Ideal des Graphen  $G(\Phi)$  von  $\Phi$ :

Seien  $\tilde{H}_i \in k[X_0, \dots, X_n]$  homogene Repräsentanten der  $H_i \in k[X_0, \dots, X_n] / I(X)$ .

Dann ist  $G(\Phi) = V\left(I(X) + \langle \tilde{H}_i Y_l - \tilde{H}_l Y_i \mid i, l = 1, \dots, m, i \neq l \rangle\right)$  und

$$I(G(\Phi)) = \left( \left( I(X) + \langle \tilde{H}_i Y_l - \tilde{H}_l Y_i \mid i, l = 0, \dots, m, i \neq l \rangle \right) : \langle \tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_m \rangle^\infty \right)$$

und  $I(Y) = I(G(\Phi)) \cap k[Y_0, \dots, Y_m]$  ([17]).

3. Berechne die birationale Umkehrtransformation  $\Psi : Y \rightarrow X$  von  $\Phi$ :

Nach obiger Betrachtung ist es ausreichend, einen Repräsentanten  $\alpha : W \rightarrow Z$ ,  $W \subset Y$ ,  $Z \subset X$  offen mit  $\alpha(y) = (G_0(y) : \dots : G_n(y))$  und  $G_i \in k[Y]$  homogen alle vom gleichen Grad, zu bestimmen:

Betrachte dazu die unabhängigen in  $X_0, \dots, X_n$  linearen Gleichungen in  $I(G(\Phi))$  und schreibe diese als  $N \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = 0$  mit einer Matrix  $N$

mit Einträgen in  $k[Y_0, \dots, Y_m]$ , in deren Zeilen jeweils homogene Einträge, alle vom selben Grad, stehen.  $I(G(\Phi))$  muß für jeden Repräsentanten  $\alpha$  von  $\Psi$  mit  $\alpha : W \rightarrow Z$ ,  $\alpha(y) = (G_0(y) : \dots : G_n(y))$ ,  $G_i \in k[Y]$ ,  $\tilde{G}_i \in k[Y_0, \dots, Y_m]$  homogener Repräsentant von  $G_i$ , alle Elemente  $X_j \tilde{G}_i - X_i \tilde{G}_j \in k[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m]$  enthalten ([17], III. §2.).

Sei

$$\ker(N \otimes (k[Y_0, \dots, Y_m]/I(Y))) = \text{image} \begin{pmatrix} G_0^0 & \dots & G_0^t \\ \vdots & & \vdots \\ G_n^0 & \dots & G_n^t \end{pmatrix}$$

also  $G_j^i \in k[Y]$ , dann bilden  $\alpha_i : W_i \rightarrow Z_i$ ,  $\alpha_i(y) := (G_0^i(y) : \dots : G_n^i(y))$ ,  $W_i := Y \setminus V(G_0^i : \dots : G_n^i)$ ,  $i = 0, \dots, t$  eine Kollektion von Repräsentanten von  $\Psi$  mit  $\bigcup_i W_i = D(\Psi)$ .

4. Schließlich ist es noch interessant, da  $\Phi$  durch einen einzelnen Repräsentanten gegeben war, für  $\Phi$  eine Kollektion von Repräsentanten  $\gamma_i : U_i \rightarrow V_i$  mit  $\gamma_i(x) := (H_0^i(x) : \dots : H_m^i(x))$ ,  $H_l^i(x) \in k[X]$ ,  $i = 0, \dots, s$  mit  $\bigcup_i U_i = D(\Phi)$  zu finden. Dazu schreibt man die unabhängigen in  $Y_0, \dots, Y_n$

linearen Gleichungen in  $I(G(\Phi))$  als  $M \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = 0$  mit einer Matrix

$M$  mit Einträgen in  $k[X_0, \dots, X_n]$ .  $I(G(\Phi))$  muß für jeden Repräsentanten  $\gamma : U \rightarrow V$ ,  $\gamma(x) = (H_0(x) : \dots : H_m(x))$ ,  $H_i \in k[X]$ ,  $\tilde{H}_i \in k[X_0, \dots, X_m]$  homogener Repräsentant von  $H_i$ , alle Elemente  $X_j \tilde{H}_i - X_i \tilde{H}_j \in k[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_m]$  enthalten. Sei

$$\ker(M \otimes k[X_0, \dots, X_n]/I(X)) = \text{image} \begin{pmatrix} H_0^0 & \dots & H_0^s \\ \vdots & & \vdots \\ H_m^0 & \dots & H_m^s \end{pmatrix}$$

dann bilden die  $\gamma_i : U_i \rightarrow V_i$ ,  $\gamma_i(y) := (H_0^i(y) : \dots : H_m^i(y))$ ,  $U_i := X \setminus V(H_0^i : \dots : H_m^i)$ ,  $i = 0, \dots, s$  eine Kollektion von Repräsentanten von  $\Phi$  mit  $\bigcup_i U_i = D(\Phi)$ .

Bemerkung:

Eine birationale Transformation  $\Phi : X \rightarrow Y$  mit einer glatten irreduziblen Kurve  $X$  und  $Y \subset \mathbb{P}_k^m$  projektiv, ist schon ein Morphismus. Insbesondere sind zwei birational äquivalente glatte projektive Kurven isomorph ([40], Ch. II, §3.1).

Wenn eine birationale Transformation  $\Phi : X \rightarrow Y$  angegeben werden soll durch einen Repräsentanten  $\gamma : U \rightarrow V$ ,  $x \mapsto (H_0(x) : \dots : H_m(x))$  mit einem Tupel  $H_0, \dots, H_m \in k[X]$ , sage auch:  $\Phi$  wird repräsentiert oder gegeben durch  $(H_0 : \dots : H_m)$ .

## 13 Berechnung eines $g_2^2$ bzw. eines $g_1^1$ aus dem adjungierten Ideal einer ebenen rationalen Kurve

Sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) = 0$ , sei  $L$  ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von  $\bar{K}$ ,  $F \in K[X, Y, Z]$  und  $F$  irreduzibel über  $L$ ,  $\deg(F) = n \geq 3$ ,  $C = V_L(F) \subset \mathbb{P}_L^2$  eine rationale Kurve, also  $p(C) = 0$ .

### 13.1 Algorithmus zur Bestimmung von glatten Punkten auf $C$ repräsentiert durch ein Ideal in $K[X, Y, Z]$

#### 13.1.1 Subsysteme der adjungierten Linearsysteme von Grad $n - 2, n - 1$

Verwende die Notation aus Abschnitt 6. Sei  $\pi : C' \rightarrow C$  ein nichtsinguläres Modell. Sei  $d = n - 2, n - 1$ . Die  $\varrho_d : \mathfrak{G}_d \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(dD - \Delta(\mathfrak{G})))$  sind surjektiv. Sei  $\mathcal{A}_d := |dD - \Delta(\mathfrak{G})|$ . Da gilt

$$\begin{array}{lll} d = n - 2 & \dim(\mathcal{A}_d) = n - 2 & \deg(\mathcal{A}_d) = n - 2 \\ d = n - 1 & \dim(\mathcal{A}_d) = 2(n - 1) & \deg(\mathcal{A}_d) = 2(n - 1) \end{array}$$

ist  $\mathcal{A}_d$  basispunktfrei. Sei  $P \in C$ ,  $P \notin V(\mathfrak{G})$ . Sei  $\mathfrak{b} := \{\Psi \in \mathfrak{G}_d \mid \Psi(P) = 0\}$ . Sei  $Q := \pi^{-1}(P)$ . Es gilt  $\deg |dD - \Delta(\mathfrak{G}) - Q| = \deg \mathcal{A}_d - 1$  und  $\dim |dD - \Delta(\mathfrak{G}) - Q| = \dim \mathcal{A}_d - 1$  und  $\varrho_d|_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(dD - \Delta(\mathfrak{G}) - P))$  ist surjektiv.

#### 13.1.2 Berechnung einer Familie von $n - 2$ glatten Punkten und 2 glatten Punkten auf $C$

Man hat Erzeuger von  $\mathfrak{G}$  mit Koeffizienten aus  $K$ , berechnet mit einem der Verfahren aus Abschnitt 11.

Sei  $\varphi \in \mathfrak{G}_{n-2}$ ,  $\varphi \in K[X, Y, Z]$  und sei  $G' \in \mathcal{A}_{n-2}$  der korrespondierenden Divisor auf  $C'$ . Schreibe  $G' = P'_1 + \dots + P'_{n-2}$ , die  $P'_i$  paarweise verschieden. Sei  $\Delta(\mathfrak{G}) = a_1 Q_1 + \dots + a_s Q_s$ . Es gelte  $\nu_{Q_i}(G') = 0 \forall i = 1, \dots, s$ . Seien  $P_1, \dots, P_{n-2} \in C$  die paarweise verschiedenen Punkte von  $C$ , die zu  $P'_1, \dots, P'_{n-2}$  korrespondieren. Es gilt

$$I(\{P_1, \dots, P_{n-2}\}) = (\langle F, \varphi \rangle : \mathfrak{G}^\infty)$$

und kann durch Erzeuger in  $K[X, Y, Z]$  gegeben werden.

Sei  $H' = P'_{n-1} + \dots + P'_{2(n-2)}$ ,  $P'_i \in C'$  eine weitere solche Familie, sodaß  $P'_1, \dots, P'_{2(n-2)}$  paarweise verschieden sind. Seien  $P_{n-1}, \dots, P_{2(n-2)} \in C$  die zu  $P'_{n-1}, \dots, P'_{2(n-2)}$  korrespondierenden Punkte von  $C$  und

$$\mathfrak{b} := \{\Psi \in \mathfrak{G}_{n-1} \mid \Psi(P_i) = 0 \forall i = 1, \dots, 2(n-2)\}$$

$$\varrho_{n-1}|_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}((n-1)D - \Delta(\mathfrak{G}) - G' - H'))$$

ist surjektiv, denn  $\deg |(n-1)D - \Delta(\mathfrak{G}) - (P_1, \dots, P_i)| = 2(n-1) - i > 0 = 2p(C)$  für alle  $i = 1, \dots, 2(n-2)$ , also basispunktfrei.  $\deg |(n-1)D - \Delta(\mathfrak{G}) - G' - H'| =$

$2 > 2p(C) + 1$  also very ample.  $\dim |(n-1)D - \Delta(\mathfrak{G}) - G' - H'| = 2$ . Es gilt mit

$$b'' := I(\{P_1, \dots, P_{n-2}\}) \cap I(\{P_{n-1}, \dots, P_{2(n-2)}\}) \cap (\mathfrak{G} \cap \langle X, Y, Z \rangle^{n-1})$$

$$\mathfrak{b} = (b'')_{n-1}$$

Man berechnet Erzeuger von  $b''$  in  $K[X, Y, Z]$  und erhält dann eine Basis  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \in K[X, Y, Z]$  von  $\mathfrak{b}$ . Seien  $\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$  die Bilder von  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  im homogenen Koordinatenring von  $C$ . Dann repräsentiert  $(\tilde{\Phi}_0 : \tilde{\Phi}_1 : \tilde{\Phi}_2)$  eine birationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow C_2$  auf eine Konik  $C_2 \subset \mathbb{P}_L^2$ .

Sei  $\varphi' \in \mathfrak{b}$ ,  $\varphi' \in K[X, Y, Z]$  und sei  $E' \in |(n-1)D - \Delta(\mathfrak{G}) - G - H|$  der korrespondierende Divisor auf  $C'$ . Sei  $\nu_{Q_i}(E') = 0 \forall i = 1, \dots, s$  und sei  $E' = T'_1 + T'_2$ ,  $T'_1 \neq T'_2$ . Sei  $E = T_1 + T_2$  der korrespondierende Divisor auf  $C$ . Es gilt

$$I(\{T_1, T_2\}) = (\langle F, \varphi' \rangle : b'^\infty)$$

und kann gegeben werden durch Erzeuger in  $K[X, Y, Z]$ .

Klassisch sagt man: die Elemente von  $\mathfrak{b}$  schneiden einen  $g_2^2$  auf  $C$  aus. Dies funktioniert sowohl für gerades und ungerades  $n$ . Das Verfahren in [39] konstruiert aus solchen Familien von jeweils 2 Punkten einen  $g_2^2$  aus den Adjungierten vom Grad  $n-2$ , falls  $n$  gerade ist und einen  $g_1^1$  falls  $n$  ungerade ist:

### 13.2 Für gerades $n$ : Berechnung eines Linearsystems mit Koeffizienten in $K$ , das einen $g_2^2$ ausschneidet

1. Wie im Abschnitt 13.1.2 gesehen, erhält man schon bei der Suche einer Familie von 2 glatten Punkten einen  $g_2^2$ . Alternativ kann man folgendermaßen vorgehen:
2. Wie in Abschnitt 11.4 seien  $S_{i,j}$  mit  $i = 2, \dots, s$  und  $j = 1, \dots, s_i$  die Mehrfachpunkte von  $C$ , wobei  $S_{i,j}$  mit  $j = 1, \dots, s_i$  jeweils Multiplizität  $i$  habe. Dabei ist es egal ob,  $C$  nur gewöhnliche Mehrfachpunkte hat oder auch infinitesimal nahe Punkte. Man hat dann die Radikalideale  $I_i = I(\{S_{i,j} \mid j = 1, \dots, s_i\})$  für  $i = 2, \dots, s$  gegeben jeweils durch Erzeuger in  $K[X, Y, Z]$ . Wähle  $e_2, \dots, e_s \in \{0, 1\}$  so, daß  $\dim \mathfrak{c} \geq 2$  mit  $\mathfrak{c} := (\mathfrak{G} \cap \bigcap_{i=2}^s I_i^{ie_i})_{n-2}$ . Man berechnet Erzeuger von  $\mathfrak{G} \cap \bigcap_{i=2}^s I_i^{ie_i}$  in  $K[X, Y, Z]$  und erhält damit eine Basis von  $\mathfrak{c}$  in  $K[X, Y, Z]$ . Sei  $\pi : C' \rightarrow C$  ein nichtsinguläres Modell. Dann ist

$$\varrho_{n-2} |_{\mathfrak{c}} : \mathfrak{c} \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}((n-2)D - \Delta(\mathfrak{G}) - E))$$

surjektiv mit einem geeigneten  $E \geq 0$  auf  $C'$ , in dem nur Punkte aus  $\Delta(\mathfrak{G})$  vorkommen. Sei  $\mathcal{D} := |(n-2)D - \Delta(\mathfrak{G}) - E|$  und  $\dim(\mathcal{D}) = \deg(\mathcal{D}) = t$ . Ist  $t$  ungerade, dann fahre mit 13.3(2) fort. (Wenn alle  $e_2 = 0, \dots, e_s = 0$  gewählt werden müssen, dann ist  $\mathcal{D} = \mathcal{A}_{n-2}$  und  $t = n-2$  und  $E = 0$ ). Ist  $t$  gerade, dann fahre folgendermaßen fort:

3. Betrachte nun  $\frac{t-2}{2}$  Familien von jeweils 2 glatten Punkten von  $C$ , wie man sie nach Abschnitt 13.1.2 erhält und seien  $Q_{1,i}, Q_{2,i} \notin V(\mathfrak{G})$ ,  $i = 1, \dots, \frac{t-2}{2}$  diese paarweise verschiedenen Punkte. Seien  $J_i := I(\{Q_{1,i}, Q_{2,i}\})$ ,  $i =$

$1, \dots, \frac{t-2}{2}$  die Ideale der Familien, die gemäß Abschnitt 13.1.2 durch Erzeuger in  $K[X, Y, Z]$  gegeben sind. Seien  $Q'_{1,i}, Q'_{2,i} \in C'$ ,  $i = 1, \dots, \frac{t-2}{2}$  die korrespondierenden Punkte auf  $C'$ . Sei  $L := \sum_{i=1}^{\frac{t-2}{2}} (Q'_{1,i} + Q'_{2,i})$ . Mit

$$\mathfrak{e} := \left\{ \varphi \in \mathfrak{c} \mid \varphi(Q_{1,i}) = 0, \varphi(Q_{2,i}) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, \frac{t-2}{2} \right\}$$

ist

$$\varrho_{n-2} |_{\mathfrak{e}}: \mathfrak{e} \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}((n-2)D - \Delta(\mathfrak{G}) - E - L))$$

surjektiv. Sei  $\mathcal{C} := |(n-2)D - \Delta(\mathfrak{G}) - E - L|$

$$\dim(\mathcal{C}) = \deg(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{D}) - \frac{t-2}{2} \cdot 2 = t - (t-2) = 2$$

Sei  $\mathfrak{c}' = \langle \mathfrak{c} \rangle$  das Ideal erzeugt von den Elementen von  $\mathfrak{c}$ . Dann ist  $\mathfrak{e} = \left( \mathfrak{c}' \cap \bigcap_{i=1}^{\frac{t-2}{2}} J_i \right)_{n-2}$ .

Man berechnet Erzeuger von  $\mathfrak{c}' \cap \bigcap_{i=1}^{\frac{t-2}{2}} J_i$  in  $K[X, Y, Z]$  und erhält dann eine Basis  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \in K[X, Y, Z]$  von  $\mathfrak{e}$ . Seien  $\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$  die Bilder von  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  im homogenen Koordinatenring von  $C$ . Dann repräsentiert  $(\tilde{\Phi}_0 : \tilde{\Phi}_1 : \tilde{\Phi}_2)$  eine birationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow C_2$  auf eine Konik  $C_2 \subset \mathbb{P}_L^2$ .

### 13.3 Für ungerades $n$ : Berechnung eines Linearsystems mit Koeffizienten in $K$ , das einen $g_1^1$ ausschneidet

1. Wie in Abschnitt 11.4 seien  $S_{i,j}$  mit  $i = 2, \dots, s$  und  $j = 1, \dots, s_i$  die Mehrfachpunkte von  $C$ , wobei die  $S_{i,j}$  mit  $j = 1, \dots, s_i$  jeweils Punkte der Multiplizität  $i$  seien. Man hat dann die Radikalideale  $I_i = I(\{S_{i,j} \mid j = 1, \dots, s_i\})$  für  $i = 2, \dots, s$ , gegeben durch Erzeuger in  $K[X, Y, Z]$ . Wähle  $e_2, \dots, e_s \in \{0, 1\}$  so, daß  $\dim \mathfrak{c} \geq 2$  und gerade mit  $\mathfrak{c} := \left( \mathfrak{G} \cap \bigcap_{i=2}^s I_i^{ie_i} \right)_{n-2}$ . Man

berechnet Erzeuger von  $\mathfrak{G} \cap \bigcap_{i=2}^s I_i^{ie_i}$  in  $K[X, Y, Z]$  und erhält dann eine Basis von  $\mathfrak{c}$  in  $K[X, Y, Z]$ . Sei  $\pi : C' \rightarrow C$  ein nichtsinguläres Modell. Dann ist  $\varrho_{n-2} |_{\mathfrak{c}}: \mathfrak{c} \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}((n-2)D - \Delta(\mathfrak{G}) - E))$  surjektiv mit einem geeigneten  $E \geq 0$  auf  $C'$ , in dem nur Punkte aus  $\Delta(\mathfrak{G})$  vorkommen. Sei  $\mathcal{D} := |(n-2)D - \Delta(\mathfrak{G}) - E|$  und  $\dim(\mathcal{D}) = \deg(\mathcal{D}) = t$ . Man hat  $t$  ungerade. (Wenn alle  $e_2 = 0, \dots, e_s = 0$  gewählt werden müssen, dann ist  $\mathcal{D} = \mathcal{A}_{n-2}$  und  $t = n - 2$  und  $E = 0$ ).

2. Betrachte nun  $\frac{t-1}{2}$  Familien von jeweils 2 glatten Punkten von  $C$  und seien  $Q_{1,i}, Q_{2,i}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{t-1}{2}$  diese Punkte,  $Q'_{1,i}, Q'_{2,i}$ ,  $i = 1, \dots, \frac{t-1}{2}$  die korrespondierenden Punkte auf  $C'$  und  $J_i := I(\{Q_{1,i}, Q_{2,i}\})$ ,  $i = 1, \dots, \frac{t-1}{2}$  die Ideale der Familien, die gemäß Abschnitt 13.1.2 durch Erzeuger in  $K[X, Y, Z]$  gegeben sind. Sei  $L := \sum_{i=1}^{\frac{t-1}{2}} (Q'_{1,i} + Q'_{2,i})$ . Mit

$$\mathfrak{e} := \left\{ \varphi \in \mathfrak{c} \mid \varphi(Q_{1,i}) = 0, \varphi(Q_{2,i}) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, \frac{t-1}{2} \right\}$$

ist

$$\varrho_{n-2} |_{\mathfrak{e}}: \mathfrak{e} \rightarrow H^0(C', \mathcal{O}_{C'}((n-2)D - \Delta(\mathfrak{G}) - E - L))$$

surjektiv. Sei  $\mathcal{C} := |(n-2)D - \Delta(\mathfrak{G}) - E - L|$

$$\dim(\mathcal{C}) = \deg(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{D}) - \frac{t-1}{2} \cdot 2 = t - (t-1) = 1$$

Sei  $\mathfrak{c}'$  das Ideal erzeugt von den Elementen von  $\mathfrak{c}$ . Dann gilt  $\mathfrak{e} = \left( \mathfrak{c}' \cap \bigcap_{i=1}^{\frac{t-1}{2}} J_i \right)_{n-2}$ .

Man berechnet Erzeuger von  $\mathfrak{c}' \cap \bigcap_{i=1}^{\frac{t-1}{2}} J_i$  in  $K[X, Y, Z]$  und erhält dann eine Basis  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \in K[X, Y, Z]$  von  $\mathfrak{e}$ . Seien  $\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$  die Bilder von  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  im homogenen Koordinatenring von  $C$ , dann repräsentiert  $(\tilde{\Phi}_0 : \tilde{\Phi}_1 : \tilde{\Phi}_2)$  eine birationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ .

### 13.4 Bemerkung

In [23] ist ein Verfahren angegeben, das direkt einen  $g_2^2$  aus einer Ganzheitsbasis berechnet, allerdings liefert dieses Verfahren unabhängig davon ob  $n$  gerade oder ungerade ist, stets einen  $g_2^2$ .

## 14 Berechnung des Geschlechts von $C$ aus dem adjungierten Ideal

Sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) = 0$  und  $L$  ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von  $\bar{K}$ . Sei  $C = V_L(F)$ ,  $F \in R := K[X, Y, Z]$  mit  $\deg(F) = n \geq 3$  eine ebene irreduzible projektive Kurve vom Geschlecht  $p(C)$  und Grad  $n$ . Nach Satz 18 ist  $\delta(C) = \max\{H(i, R/\mathfrak{G}) \mid i \geq 0\}$ , also

$$p(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \max\{H(i, R/\mathfrak{G}) \mid i \geq 0\}$$

Mit den Verfahren aus Abschnitt 11 kann man Erzeuger von  $\mathfrak{G}$  mit Koeffizienten in  $K$  berechnen und damit  $H(i, R/\mathfrak{G})$ .

## 15 Parametrisierung von Koniken

Sei  $C := V_{\mathbb{C}}(F) := \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid F(P) = 0\}$  mit  $F \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$  mit  $\deg(F) = 2$  irreduzibel über  $\mathbb{C}$  eine Konik. Wir suchen einen Punkt  $P \in V_{\mathbb{Q}}(F) = \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2 \mid F(P) = 0\}$ . Ein solches  $P$  heißt *rationaler Punkt* von  $C$ .

Da  $\frac{(\deg(F)-1)(\deg(F)-2)}{2} = 0$  hat  $C$  keine Singularitäten und  $p(C) = 0$ . Damit gibt es einen  $g_1^1$  auf  $C$  und damit eine birationale Transformation  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$ , die ein Isomorphismus ist. Sei  $P = (P_0 : P_1 : P_2) \in V_{\mathbb{Q}}(F)$  (OE  $P_0 \neq 0$ ). Betrachte das Linearsystem der Geraden  $L_{(s:t)} = -P_1 sX - P_2 tX + P_0 sY + P_0 tZ$  durch  $P$ .  $L_{(s:t)}$  induziert eine birationale Transformation  $\Psi : C \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Für den Graphen  $G(\Psi) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  von  $\Psi$  gilt  $I(G(\Psi)) = (\langle F, L_{(s:T)} \rangle : I(P)^{\infty})$ . Da  $\Psi$  birational ist, enthält  $I(G(\Psi))$  zwei in  $X, Y, Z$  und  $S, T$  bilineare unabhängige

Gleichungen. Schreibe diese als  $M \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$  mit  $M \in \mathbb{Q}[S, T]_{2,3}$ . Der Kern

von  $M$  wird von einem  $(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2)^T$  mit  $\Phi_i \in \mathbb{Q}[S, T]$  erzeugt.  $(\Phi_0 : \Phi_1 : \Phi_2)$  ist eine rationale Parametrisierung von  $C$ . Insbesondere ist klar, daß dann auf

$C$  unendlich viele rationale Punkte liegen. Eine Konik hat also entweder keine oder unendlich viele rationale Punkte.

Ziel ist es also einen rationalen Punkt auf  $C$  zu finden. Sei

$$F = aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2$$

1. Es gelte  $b^2 = 4ac$  oder  $d^2 = 4af$  oder  $e^2 = 4cf$  :

OE kann man annehmen, daß  $b^2 = 4ac$  :

- (a) Sei  $c = 0$  :

Dann ist  $b = 0$ . Wäre auch  $a = 0$ , dann ist  $F = dXZ + eYZ + fZ^2 = Z(dX + eY + fZ)$  und damit wäre  $F$  nicht irreduzibel. Also muß  $a \neq 0$  gelten. Es gilt dann  $a \left(-\frac{de}{2a}\right)^2 + d \left(-\frac{de}{2a}e\right) + e \left(-\frac{4af-d^2}{4a}e\right) + fe^2 = 0$  und damit ist

$$P := \left( -\frac{de}{2a} : -\frac{4af-d^2}{4a} : e \right)$$

ein rationaler Punkt von  $C$ .

- (b) Sei  $c \neq 0$  :

Setze  $d' := 4cd - 2be$  und  $f' = 4cf - e^2$ . Damit gilt

$$\tilde{F} := (bX + 2cY + eZ)^2 + d'XZ + f'Z^2 = 4cF$$

Da  $c \neq 0$  gilt also  $\tilde{F}(P) = 0 \Leftrightarrow F(P) = 0$ . Wenn  $d' = 0$  und  $f' = 0$ , dann ist  $F$  nicht irreduzibel. Sonst ist

$$P = \left( -f' : -\frac{ed'}{2c} + \frac{b}{2c}f' : d' \right)$$

ein rationaler Punkt.

2. Gelte nun  $b^2 \neq 4ac$  und  $d^2 \neq 4af$  und  $e^2 \neq 4cf$  :

- (a) Gelte  $a = 0$  und  $c = 0$  :

Setze  $N := 4(de - bf)$ .

Dann gilt  $b \neq 0$ . Setze  $X' := b(X + Y) + dZ + eZ$  und  $Y' := b(X - Y) - dZ + eZ$ . Dann gilt mit

$$\tilde{F}(X', Y', Z') := X'^2 - Y'^2 - NZ'^2$$

$$\tilde{F}(X', Y', Z') = 4bF(X, Y, Z)$$

Insbes. muß gelten  $N \neq 0$ , sonst wäre  $F$  reduzibel.

Wenn  $\tilde{F}(P') = 0$  mit  $P' = (P'_0 : P'_1 : P'_2)$ , dann ist  $F(P) = 0$  mit

$$P = (P'_0 + P'_1 - 2eP'_2 : P'_0 - P'_1 - 2dP'_2 : 2bP'_2)$$

Wenn  $F(P) = 0$  mit  $P = (P_0 : P_1 : P_2)$ , dann ist  $\tilde{F}(P') = 0$  mit

$$P' = (b(P_0 + P_1) + dP_2 + eP_2 : b(P_0 - P_1) - dP_2 + eP_2 : P_2)$$

(b) Gelte  $c \neq 0$  :

Setze

$$D := 4ac - b^2$$

$$M := 4(c^2d^2 - bcde + ace^2 + b^2cf - 4ac^2f)$$

Setze  $X' := DX + 2dcZ - beZ$  und  $Y' := bX + 2cY + eZ$ . Dann gilt mit

$$\tilde{F}(X', Y', Z') := X'^2 + DY'^2 - MZ^2$$

$$\tilde{F}(X', Y', Z') = 4cDF(X, Y, Z)$$

Wenn  $\tilde{F}(P') = 0$  mit  $P' = (P'_0 : P'_1 : P'_2)$ , dann ist  $F(P) = 0$  mit

$$P = (2c(P'_0 - 2dcP'_2 + beP'_2) : DP'_1 - b(P'_0 - 2dcP'_2 + beP'_2) - DeP'_2 : 2cDP'_2)$$

Wenn  $F(P) = 0$  mit  $P = (P_0 : P_1 : P_2)$ , dann ist  $\tilde{F}(P') = 0$  mit

$$P' = (DP_0 + 2dcP_2 - beP_2 : bP_0 + 2cP_1 + eP_2 : P_2)$$

(c) Gelte  $a \neq 0$  :

Vertausche  $X$  und  $Y$ , dann (b.).

Damit erhält man bei (a.), (b.) oder (c.) eine Gleichung der Form  $X^2 + KY^2 = LZ^2$  mit  $K, L \in \mathbb{Z}$ .

Wenn  $L < 0$  und  $K > 0$ , dann hat  $C$  keine reellen, insbesondere keine rationalen Punkte.

Betrachte also jetzt die Gleichung  $X^2 + K_1Y^2 + K_2Z^2 = 0$  mit  $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $K_1 < 0$  oder  $K_2 < 0$  und beide nicht 0.

(a) Man kann erreichen, daß  $K_1$  und  $K_2$  quadratfrei sind, denn sei  $K_1 = K'_1q_1^2$  und  $K_2 = K'_2q_2^2$  mit  $K'_1$  und  $K'_2$  quadratfrei betrachte  $X^2 + K'_1Y^2 + K'_2Z^2 = 0$ . Ist  $P' = (P'_0 : P'_1 : P'_2)$  eine rationale Lösung dieser Gleichung, dann ist  $P = \left(P'_0 : \frac{1}{q_1}P'_1 : \frac{1}{q_2}P'_2\right)$  eine rationale Lösung von  $X^2 + K_1Y^2 + K_2Z^2 = 0$  und ist  $P = (P_0 : P_1 : P_2)$  eine rationale Lösung von  $X^2 + K_1Y^2 + K_2Z^2 = 0$ , dann ist  $P' = (P_0 : q_1P_1 : q_2P_2)$  eine rationale Lösung von  $X^2 + K'_1Y^2 + K'_2Z^2 = 0$ .

(b) Sei  $g := ggT(K'_1, K'_2)$ . Sei  $P'' = (P''_0 : P''_1 : P''_2)$  eine rationale Lösung der Gleichung  $gX^2 + \frac{K'_1}{g}Y^2 + \frac{K'_2}{g}Z^2 = 0$ . Dann ist  $P = (gP''_0 : P''_1 : P''_2)$  eine rationale Lösung von  $X^2 + K'_1Y^2 + K'_2Z^2 = 0$ . Ist  $P = (P'_0 : P'_1 : P'_2)$  eine rationale Lösung von  $X^2 + K'_1Y^2 + K'_2Z^2 = 0$ , dann ist  $P'' = \left(\frac{P'_0}{g} : P'_1 : P'_2\right)$  eine rationale Lösung von  $gX^2 + \frac{K'_1}{g}Y^2 + \frac{K'_2}{g}Z^2 = 0$ .

(c) Man muß also die Gleichung

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0 \tag{11}$$

$a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  nicht alle dasselbe Vorzeichen

$$ggT(a, b) = 1, ggT(a, c) = 1, ggT(b, c) = 1$$

$a, b, c$  quadratfrei

betrachten und sucht  $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{Z}$ , nicht alle 0 und  $ggT(P_0, P_1, P_2) = 1$  mit  $aP_0^2 + bP_1^2 + cP_2^2 = 0$ . Nenne solche  $P_0, P_1, P_2$  eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung. Folgender Satz liefert ein Kriterium, wann Gleichung (11) eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung hat, und der konstruktive Beweis ein Verfahren, um eine solche im Falle der Existenz zu bestimmen:

**Satz 91** Gleichung (11) hat eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung genau dann, wenn

$$\begin{aligned} -ab &\in R(|c|) \text{ und} \\ -bc &\in R(|a|) \text{ und} \\ -ac &\in R(|b|) \end{aligned} \tag{12}$$

wobei für ein  $n \in \mathbb{N}$  definiert sei

$$R(n) := \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{Z} \text{ mit } x^2 = m \pmod{n} \text{ d.h. } x^2 \equiv_n m\}$$

**Beweis.** Definiere den **Index**  $J$  als:

$$J(a, b, c) = \left\{ \begin{array}{ll} |ab| & \text{falls } |ca| \leq |ab| \leq |bc| \text{ oder } |bc| \leq |ab| \leq |ca| \\ |ca| & \text{falls } |ab| \leq |ca| \leq |bc| \text{ oder } |bc| \leq |ca| \leq |ab| \\ |bc| & \text{falls } |ca| \leq |bc| \leq |ab| \text{ oder } |ab| \leq |bc| \leq |ca| \end{array} \right\} \in \mathbb{N}$$

1. Sei  $J(a, b, c) = 1$ :

Dann ist eine der Zahlen  $|bc|, |ca|, |ab|$  gleich 1, OE sei  $|ab| = 1$ , also  $|a| = 1$  und  $|b| = 1$ , also  $|bc| = |c|$  und  $|ca| = |c|$ , also  $1 = J(a, b, c) = |c|$ . Da  $a, b, c$  nicht alle das selbe Vorzeichen haben kann man OE annehmen, daß  $a = -b$ . Dann ist  $(P_0 : P_1 : P_2) = (1 : 1 : 0)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung von (11).

2. Sei  $J(a, b, c) > 1$ :

Man zeigt nun, daß entweder direkt eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung von Gleichung (11) angegeben werden kann, oder  $A, B, C \in \mathbb{Z}$  gefunden werden können mit

$$\begin{aligned} A, B, C &\in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ nicht alle das selbe Vorzeichen} \\ ggT(A, B) &= 1, ggT(A, C) = 1, ggT(B, C) = 1 \\ A, B, C &\text{ quadratfrei} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -AB &\in R(|C|) \text{ und} \\ -BC &\in R(|A|) \text{ und} \\ -AC &\in R(|B|) \end{aligned}$$

sodaß  $J(A, B, C) < J(a, b, c)$  und die Gleichung

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$$

eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung  $(P_0 : P_1 : P_2)$  hat, falls

$$AX'^2 + BY'^2 + CZ'^2 = 0$$

eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung  $(P'_0 : P'_1 : P'_2)$  hat. Zeige außerdem, daß  $(P_0 : P_1 : P_2)$  aus  $(P'_0 : P'_1 : P'_2)$  berechnet werden kann.

Beweis:

Durch Permutieren von  $X, Y, Z$  kann man erreichen, daß

$$|a| \leq |b| \leq |c|$$

Dann ist auch  $|ab| \leq |ca| \leq |bc|$  und damit  $J(a, b, c) = |ac|$ . Da  $ggT(b, c) = 1$ , würde  $|b| = |c|$  implizieren, daß  $|b| = |c| = 1$ , also auch  $|a| = 1$ . Damit wäre  $J(a, b, c) = 1$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist also schon

$$\begin{aligned} |a| &\leq |b| < |c| \\ |ab| &< |ca| = J(a, b, c) \leq |bc| \end{aligned}$$

Da  $-ab \in R(|c|)$  und  $ggT(a, c) = 1$ , gibt es  $R \in \mathbb{Z}$  mit  $R^2 \equiv_c -ab$  und  $r \in \mathbb{Z}$  mit  $R \equiv_c ar$ . Man kann erreichen, daß  $|r| \leq \frac{|c|}{2}$ , denn  $R \equiv_c a(r + nc)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt, da  $ggT(a, c) = 1$ , daß  $ar^2 \equiv_c -b$ , also gibt es ein  $Q \in \mathbb{Z}$  mit

$$ar^2 + b = cQ$$

Dann ist

$$|Q| \leq \frac{|a|r^2 + |b|}{|c|} \leq \frac{1}{4}|ac| + \left| \frac{b}{c} \right| < \frac{1}{4}J(a, b, c) + 1 < J(a, b, c)$$

da  $J(a, b, c) \geq 2$ .

Ist  $Q = 0$ , dann ist  $|r| = 1$ , da  $b$  quadratfrei war, und damit  $a = -b$ . Dann ist aber  $(P_0 : P_1 : P_2) = (1 : 1 : 0)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung von (11).

Sei also  $Q \neq 0$ :

Sei  $A := ggT(ar^2, b, cQ)$ ,  $A > 0$ . Also  $A = ggT(ar^2, b)$ ,  $A = ggT(b, cQ)$  und  $A = ggT(ar^2, cQ)$  wegen  $ar^2 + b = cQ$ . Da  $A \mid b$  und  $a, b, c$  paarweise teilerfremd, gilt  $ggT(A, a) = 1$  und  $ggT(A, c) = 1$ , deshalb  $A \mid r^2$  und  $A \mid Q$ . Weil  $b$  quadratfrei ist und  $A \mid b$  ist auch  $A$  quadratfrei, also  $A \mid r$ . Damit gibt es  $\alpha, \beta, q \in \mathbb{Z}$  und  $C, \gamma \in \mathbb{Z}$  mit

$$r = A\alpha, b = A\beta \text{ und } Q = Aq = AC\gamma^2$$

wobei  $\gamma^2$  das größte Quadrat sei, das  $q$  teilt. Aus  $ar^2 + b = cQ$ , folgt also

$$aA\alpha^2 + \beta = cC\gamma^2$$

wobei

$$\begin{aligned} ggT(aA\alpha^2, \beta) &= 1 \\ ggT(cC\gamma^2, \beta) &= 1 \\ ggT(aA\alpha^2, cC\gamma^2) &= 1 \end{aligned}$$

Sei

$$B := a\beta$$

(a) Offensichtlich sind  $A, B, C \neq 0$ .

- (b) Es ist  $AB = Aa\beta = Aa\frac{b}{A} = ab$ . Da  $ggT(a, b) = 1$  und  $a, b$  quadratfrei sind, sind auch  $A, B$  wegen  $AB = ab$  quadratfrei und  $ggT(A, B) = 1$ .  $C$  ist nach Definition quadratfrei.  $ggT(AB, C) = 1$ , denn  $AB = aA\beta$  und  $ggT(\beta, C) = 1$  und  $ggT(aA, C) = 1$ .  
Insgesamt ist also  $ggT(A, B) = 1$ ,  $ggT(A, C) = 1$ ,  $ggT(B, C) = 1$  und  $A, B, C$  quadratfrei.
- (c)  $A, B, C$  haben nicht alle das selbe Vorzeichen. Dies ist erfüllt, wenn  $AB < 0$ . Ist  $ab = AB > 0$ , dann ist  $ac < 0$  und  $bc < 0$  nach Voraussetzung. Wegen  $ar^2 + b = cQ$  ist dann

$$c^2AC\gamma^2 = c^2Q = car^2 + cb < 0$$

und damit  $AC < 0$ .

- (d) Zeige nun:

$$\begin{aligned} -AB &\in R(|C|) \text{ und} \\ -BC &\in R(|A|) \text{ und} \\ -AC &\in R(|B|) \end{aligned}$$

Wir haben:

$$\beta cC \in R(|aA|) \tag{13}$$

$$acAC \in R(|\beta|) \tag{14}$$

$$\underbrace{-aA\beta}_{-AB} \in R(|C|) \tag{15}$$

denn wegen  $aA\alpha^2 + \beta = cC\gamma^2$  ist

$$\begin{aligned} \beta cC &\equiv_{aA} (cC\gamma)^2 \\ aAcC\alpha^2 &\equiv_{\beta} (cC)^2 \gamma^2 \\ -aA\beta &\equiv_C (aA\alpha)^2 \end{aligned}$$

wegen  $ggT(aA\alpha^2, \beta) = 1$  ist  $ggT(\alpha, \beta) = 1$  und damit gibt es  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}$  mit

$$aAcC \equiv_{\beta} (\tilde{\alpha}cC\gamma)^2$$

Nach Voraussetzung ist

$$\underbrace{-bc}_{-\beta Ac} \in R(|a|)$$

Außerdem ist

$$-ac \in R(|A|) \tag{16}$$

denn nach Voraussetzung ist  $-ac \in R(|b|)$  und  $b = A\beta$ .

Wegen Gleichung 13 ist  $\beta cC \in R(|A|)$ . Mit Gleichung 16 hat man also

$$-BCc^2 = -\beta cCac \in R(|A|)$$

Da  $ggT(c, A) = 1$  ist

$$-BC \in R(|A|)$$

Nach Voraussetzung  $-ac \in R(|b|)$  und  $b = A\beta$  ist

$$-ac \in R(|\beta|)$$

Mit Gleichung 14 folgt  $-AC \in R(|\beta|)$ , also gibt es ein  $u$  mit

$$u^2 \equiv_{\beta} -AC$$

Wegen Gleichung 13 ist  $\beta cC \in R(|a|)$  und nach Voraussetzung  $-\beta Ac = -bc \in R(|a|)$ , damit  $-AC(\beta c)^2 \in R(|a|)$ , also mit  $ggT(\beta c, a) = 1$  hat man  $-AC \in R(|a|)$  und damit gibt es ein  $v$  mit

$$v^2 \equiv_a -AC$$

Da  $ggT(a, \beta) = 1$  ist, gibt es mit dem Chinesischen Restsatz ein  $w$  mit  $w \equiv_{\beta} u$  und  $w \equiv_a v$ . Damit wird  $w^2 + AC$  von  $a$  und von  $\beta$  geteilt und damit auch von  $B = a\beta$ , da  $ggT(a, \beta) = 1$ .

Schließlich ist

$$\begin{aligned} |AB| &= |ab| < J(a, b, c) \text{ und} \\ |AC| &\leq |AC|\gamma^2 = |Q| < J(a, b, c) \end{aligned}$$

und damit

$$J(A, B, C) < J(a, b, c)$$

Hat man eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung  $(P'_0 : P'_1 : P'_2)$  von  $AX'^2 + BY'^2 + CZ'^2 = 0$ , dann ist  $(P_0 : P_1 : P_2)$  mit

$$\begin{aligned} P_0 &:= A\alpha P'_0 - \beta P'_1 \\ P_1 &:= P'_0 + a\alpha P'_1 \\ P_2 &:= C\gamma P'_2 \end{aligned}$$

eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung von  $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 0$ , denn:

Wegen  $b = \beta A$ ,  $B = a\beta$  und  $aA\alpha^2 + \beta = cC\gamma^2$  ist

$$\begin{aligned} ba^2\alpha^2 + a\beta^2 &= a\beta(aA\alpha^2 + \beta) = a\beta cC\gamma^2 = BcC\gamma^2 \\ aA^2\alpha^2 + b &= A(aA\alpha^2 + \beta) = AcC\gamma^2 \\ ba\alpha - aA\alpha\beta &= a\alpha(b - A\beta) = 0 \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} &a(A\alpha X' - \beta Y')^2 + b(X' + a\alpha Y')^2 + c(C\gamma Z')^2 = \\ &= (aA^2\alpha^2 + b)X'^2 + (2ba\alpha - 2aA\alpha\beta)X'Y' + (ba^2\alpha^2 + a\beta^2)Y'^2 + (cC^2\gamma^2)Z'^2 = \\ &= cC\gamma^2(AX'^2 + BY'^2 + CZ'^2) \end{aligned}$$

Außerdem können nicht alle  $P_0, P_1, P_2 = 0$  sein, denn wäre  $P_0, P_1 = 0$ , dann wäre  $(\beta + Aa\alpha^2)P'_1 = 0$ . Da  $\beta + Aa\alpha^2 = cC\gamma^2 \neq 0$  (wegen  $Q \neq 0$  und  $c \neq 0$ ), ist dann  $P'_1 = 0$  und damit  $P'_0 = 0$ , also  $P'_2 = 0$  ein Widerspruch dazu, daß  $(P'_0 : P'_1 : P'_2)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung von  $AX'^2 + BY'^2 + CZ'^2 = 0$  war. Nach Teilen durch den  $ggT$  kann man annehmen, daß  $ggT(P_0, P_1, P_2) = 1$ .

Für die Umkehrung:

Sei  $(P_0, P_1, P_2)$  eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung von  $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  nicht alle dasselbe Vorzeichen,  $ggT(a, b) = 1$ ,  $ggT(a, c) = 1$ ,  $ggT(b, c) = 1$  und  $a, b, c$  quadratfrei). Zu zeigen ist

$$\begin{aligned} -ab &\in R(|c|) \text{ und} \\ -bc &\in R(|a|) \text{ und} \\ -ac &\in R(|b|) \end{aligned}$$

Angenommen  $ggT(c, P_0) \neq 1$ . Sei  $p$  eine Primzahl mit  $p \mid ggT(c, P_0)$ . Dann gilt  $p \mid (bP_1^2)$ , denn  $bP_1^2 = -aP_0^2 - cP_2^2$ . Da  $p \mid c$  und  $ggT(b, c) = 1$ , hat man  $p \nmid b$ , also  $p \mid P_1^2$ , also  $p \mid P_1$ . Wegen  $p \mid P_0$ , also  $p^2 \mid (-aP_0^2 - bP_1^2)$ , also  $p^2 \mid (cP_2^2)$ . Da  $c$  quadratfrei ist, hat man  $p \mid P_2^2$ , also  $p \mid P_2$ . Insgesamt:  $p \mid P_0, p \mid P_1, p \mid P_2$ , ein Widerspruch zu  $ggT(P_0, P_1, P_2) = 1$ , also ist

$$ggT(c, P_0) = 1$$

Damit gibt es ein  $\overline{P_0}$  mit  $P_0 \overline{P_0} \equiv_c 1$ . Da  $aP_0^2 + bP_1^2 = -cP_2^2$ , ist  $-aP_0^2 \equiv_c bP_1^2$ , also  $-ab \overline{P_0}^2 P_0^2 \equiv_c b^2 \overline{P_0}^2 P_1^2$ , also  $-ab \equiv_c (b \overline{P_0} P_1)^2$ , also

$$-ab \in R(|c|)$$

Analog  $-bc \in R(|a|)$  und  $-ac \in R(|b|)$ . ■

**Algorithmus 92** *Mit dem Beweis von Satz 91 haben wir folgenden Algorithmus, um zu testen, ob die Konik  $V(X^2 + b_1 Y^2 + c_1 Z^2)$ ,  $b_1, c_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  nicht beide positiv, einen rationalen Punkt hat und in diesem Falle einen solchen rationalen Punkt  $pkt$  zu bestimmen. Gibt es auf der Konik keinen rationalen Punkt, dann liefert der Algorithmus  $pkt = FAIL$ .*

$b_1, c_1$  müssen nicht quadratfrei sein (Ab Schritt 4. ist das Verfahren aus dem Beweis von Satz 91 enthalten, das eine Konik  $V(aX^2 + bY^2 + cZ^2)$  mit  $a, b, c$  quadratfrei und teilerfremd, behandelt). Der nachfolgende Algorithmus 93 verwendet Algorithmus 92.

1. Bestimme  $b_s, c_s \in \mathbb{N}$  und  $b_r, c_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  mit  $b_1 = b_r b_s^2$  und  $c_1 = c_r c_s^2$ , wobei  $b_s^2$  bzw.  $c_s^2$  die größten Quadrate sind, die  $b_1$  bzw.  $c_1$  teilen.
2. Sei  $g := ggT(b_r, c_r)$ .
3.  $pkt := \left( X, \frac{Y}{b_s g}, \frac{Z}{c_s g} \right)$ .  
 $a := g$   
 $b := \frac{b_r}{g}$   
 $c := \frac{c_r}{g}$   
 (man betrachtet nun  $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$ ).
4. Prüfe ob es  $R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{Z}$  mit  $R_1^2 \equiv_c -ab$  und  $R_2^2 \equiv_b -ac$  und  $R_3^2 \equiv_a -bc$  gibt. Wenn nicht, dann setze  $pkt := FAIL$  und fertig.
5. Solange  $J(a, b, c) > 1$ :

- (a) Permutiere  $a, b, c$  sodaß  $|a| \leq |b| \leq |c|$ , und permutiere die Einträge von  $\text{pkt}$  entsprechend.
- (b) Bestimme  $R_1 \in \mathbb{Z}$  mit  $R_1^2 \equiv_c -ab$  und sei  $r_1 := \frac{R_1}{a} \bmod c$  mit  $|r_1| \leq \frac{|c|}{2}$ ,  $r_1 \in \mathbb{Z}$ .  
(man beachte, daß es dazu effiziente Maple-Funktionen gibt).
- (c)  $Q := \frac{(ar_1^2 + b)}{c}$
- (d) Ist  $Q = 0$ :  
 $\text{pkt} := \text{pkt}(1 : 1 : 0)$   
Fertig.
- (e)  $A := \text{ggT}(ar_1^2, b, cQ)$   
 $\alpha := \frac{r_1}{A}$   
 $\beta := \frac{b}{A}$   
 $B := a\beta$
- (f) Bestimme  $\gamma \in \mathbb{N}$  und  $C \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  mit  $\frac{Q}{A} = C\gamma^2$ , wobei  $\gamma^2$  das größte Quadrat ist, das  $\frac{Q}{A} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  teilt.
- (g)  $\text{pkt} := \text{pkt}(A\alpha X - \beta Y, X + a\alpha Y, C\gamma Z)$
- (h)  $a := A, b := B, c := C$

6. Ist  $\text{sign}(a) = -\text{sign}(b)$  dann  $\text{pkt} := \text{pkt}(1 : 1 : 0)$ , Fertig.

7. Ist  $\text{sign}(a) = -\text{sign}(c)$  dann  $\text{pkt} := \text{pkt}(1 : 0 : 1)$ , Fertig.

8. Ist  $\text{sign}(b) = -\text{sign}(c)$  dann  $\text{pkt} := \text{pkt}(0 : 1 : 1)$ , Fertig.

**Algorithmus 93** Folgender Algorithmus testet, ob die Konik

$$V(aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2)$$

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ , einen rationalen Punkt hat, und bestimmt in diesem Falle einen solchen rationalen Punkt  $\text{pkt}$ . Dabei wird auf Algorithmus 92 zurückgegriffen:

1. Ist  $b^2 = 4ac$ :

(a) Ist  $c = 0$ :

$$\text{pkt} := \left( -\frac{de}{2a} : -\frac{4af - d^2}{4a} : e \right)$$

Fertig.

(b) Ist  $c \neq 0$ :

$$f_s := 4cf - e^2$$

$$d_s := 4cd - 2be$$

$$\text{pkt} := \left( -f_s : -\frac{ed_s}{2c} + \frac{bf_s}{2c} : d_s \right)$$

Fertig.

2. Ist  $d^2 = 4af$ :

(a) Ist  $f = 0$ :

$$pkt := \left( -\frac{be}{2a} : e : -\frac{4ac-b^2}{4a} \right)$$

Fertig.

(b) Ist  $f \neq 0$ :

$$c_s := 4cf - e^2$$

$$b_s := 4fb - 2de$$

$$pkt := \left( -c_s : b_s : -\frac{eb_s}{2c} + \frac{dc_s}{2f} \right)$$

Fertig.

3. Ist  $e^2 = 4fc$ :

(a) Ist  $c = 0$ :

$$pkt := \left( b : -\frac{4af-d^2}{4f} : -\frac{db}{2f} \right)$$

Fertig.

(b) Ist  $c \neq 0$ :

$$a_s := 4ca - b^2$$

$$d_s := 4cd - 2be$$

$$pkt := \left( d_s, -\frac{bd_s}{2c} + \frac{ea_s}{2c} : -a_s \right)$$

Fertig.

4.  $pkt := (X : Y : Z)$

5. Ist  $a = 0$  und  $c = 0$ :

$$B := -1$$

$$C := -(4de - 4bf)$$

$$pkt := \left( \frac{X+Y-2eZ}{2b} : \frac{X-Y-2dZ}{2b} : Z \right)$$

6. Ist  $a \neq 0$  und  $c = 0$ :

$$pkt := (Y : X : Z)$$

Vertausche  $a$  mit  $c$  und  $e$  mit  $d$ .

7. Ist  $c \neq 0$ :

$$D := 4ac - b^2$$

$$pkt := pkt \left( X, \frac{1}{2c}Y - \frac{e}{2c}Z - \frac{b}{2c}X, Z \right)$$

$$pkt := pkt \left( \frac{1}{D}X - \frac{2dc-be}{D}Z, Y, Z \right)$$

$$B := D$$

$$C := -4(c^2d^2 - bcde + ace^2 + b^2cf - 4ac^2f)$$

8. Sind  $B, C > 0$ :

Es existiert kein rationaler Punkt auf der Konik.

Fertig.

9. Sei  $\overline{pkt}$  das Ergebnis des Algorithmus 92 angewendet auf  $X^2 + BY^2 + CZ^2$ .

(a) Ist  $\overline{pkt} = FAIL$ , dann existiert kein rationaler Punkt auf der Konik.

Fertig.

(b)  $pkt := pkt(\overline{pkt})$ .

Fertig.

Ein weiteres Verfahren, um eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung  $(P_0 : P_1 : P_2)$  zu finden, liefert der folgende Satz. Dieses Verfahren ist jedoch nur für kleine Koeffizienten praktikabel.

**Satz 94** *Hat die Gleichung (11) eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung, dann hat sie auch eine Lösung  $(P_0 : P_1 : P_2)$  mit*

$$|P_0| \leq \sqrt{|bc|}$$

$$|P_1| \leq \sqrt{|ca|}$$

$$|P_2| \leq \sqrt{|ab|}$$

*Beweis:* [30], Ch. 7, Theorem 5.

Sei OE  $\sqrt{|bc|} \leq \sqrt{|ca|} \leq \sqrt{|ab|}$ . Lasse  $P_0$  alle ganzen Zahlen im Intervall  $[-\sqrt{|bc|}, \sqrt{|bc|}]$  durchlaufen und  $P_1$  alle ganzen Zahlen in  $[-\sqrt{|ca|}, \sqrt{|ca|}]$ . Teste ob  $-\frac{aP_0^2 + bP_1^2}{c}$  ein Quadrat ist. Dies ist nur praktikabel, wenn  $a, b, c$  klein sind, hat aber den Vorteil, daß es eine  $\mathbb{Z}$ -Lösung  $(P_0 : P_1 : P_2)$ , für die  $\max\{|P_0|, |P_1|, |P_2|\}$  minimal ist, liefert, was sich direkt auf die Größe der Koeffizienten in der Parametrisierung der Konik und damit der rationalen Kurve auswirkt.

Hat schließlich  $C$  keine rationalen Punkte, dann kann man  $C$  mit einer Geraden schneiden und 2 Punkte über  $\mathbb{C}$  finden, d.h. man kann  $C$  parametrisieren über einer algebraischen Körpererweiterung vom Grad 2 von  $\mathbb{Q}$ . OE können wir annehmen, daß  $C$  die Gleichung  $X^2 + KY^2 = LZ^2$  hat, mit  $K, L \in \mathbb{Z}$ .

1. Man kann einen reellen Punkt  $P$  auf  $C$  finden, falls  $L > 0$  oder  $K < 0$ :

Wenn  $L > 0$  hat man  $P = (\sqrt{L} : 0 : 1)$ .

Wenn  $L < 0$  und  $K < 0$  dann hat man  $P = (0 : \sqrt{\frac{L}{K}} : 1)$

2. Ist  $L < 0$  und  $K > 0$ , dann gibt es keinen reellen Punkt auf  $C$ .

## 16 Parametrisierung rationaler Normkurven

### 16.1 Allgemeine Definition von Differentialen

**Definition 95** *Sei  $k$  ein Ring,  $A$  eine  $k$ -Algebra,  $M$  ein  $A$ -Modul. Der Modul der  $k$ -**Derivationen von  $A$  in  $M$** , bezeichnet mit  $Der_k(A, M)$ , sei die Menge aller Abbildungen  $D : A \rightarrow M$  mit*

1.  $D$  ist  $k$ -linear

2.  $D(fg) = fD(g) + D(f)g \forall f, g \in A$

**Definition 96** Sei  $k$  ein Ring,  $A$  eine  $k$ -Algebra. Es gebe einen  $A$ -Modul  $\Omega_{A/k}^1$  und ein  $d_{A/k} \in \text{Der}_k(A, \Omega_{A/k}^1)$ , sodaß es für jeden  $A$ -Modul  $M$  und jede  $k$ -Derivation  $D : A \rightarrow M$  genau einen  $A$ -Homomorphismus  $w : \Omega_{A/k}^1 \rightarrow M$  gibt, sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d_{A/k}} & \Omega_{A/k}^1 \\ D \downarrow & \swarrow w & \\ M & & \end{array}$$

Dann heißt der  $A$ -Modul  $\Omega_{A/k}^1$  der Modul der **1-Differentiale auf  $A$  über  $k$** .  $d_{A/k}$  heißt das **äußere Differential** von  $A$  über  $k$ .  $(d_{A/k}, \Omega_{A/k}^1)$  heißt **Differentialpaar** auf  $A$  über  $k$  und ist bis auf Isomorphie eindeutig.

In der Notation aus Abschnitt 2.3 also  $\Omega_{A/k}^1 = D_k(A)$ .

**Satz 97** Sei  $k$  ein Ring. Sei  $A = k[T_\alpha]$  eine Polynomalgebra (eventuell in unendlich vielen Variablen). Sei  $\Omega$  der freie  $A$ -Modul erzeugt von den Symbolen  $dT_\alpha$  und sei  $d : A \rightarrow \Omega$  die Derivation definiert durch  $dP(T) := \sum_\alpha \frac{\partial P}{\partial T_\alpha} dT_\alpha$ . Dann ist  $(d, \Omega)$  das Differentialpaar auf  $A$  über  $k$ .

**Satz 98** Sei  $k$  ein Ring,  $A$  eine  $k$ -Algebra,  $I \subset A$  ein Ideal und  $B := A/I$ . Angenommen es existiert das Differentialpaar  $(d_{A/k}, \Omega_{A/k}^1)$  auf  $A$  über  $k$ . Dann existiert das Differentialpaar  $(d_{B/k}, \Omega_{B/k}^1)$  auf  $B$  über  $k$  und es gibt eine exakte Sequenz von  $B$ -Moduln

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k}^1 \rightarrow 0$$

und  $\delta$  wird von  $d_{A/k}$  induziert.

Beweis: [2], VI, 1.8.

**Satz 99** Sei  $k$  ein Ring und  $B$  eine  $k$ -Algebra. Dann existiert das Differentialpaar  $(d_{B/k}, \Omega_{B/k}^1)$ .

Beweis: [2], VI, 1.9.

**Satz 100** Sei  $X$  ein  $S$ -Schema. Dann gibt es einen quasikohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\Omega_{X/S}^1$  und eine Abbildung  $d_{X/S} : \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/S}^1$  definiert wie folgt:

Für jede affine offene Teilmenge  $V = \text{Spec}(k)$  von  $S$  und jede affine offene Teilmenge  $U = \text{Spec}(A)$  von  $X$ , wobei  $U$  über  $V$  liegt, setze  $\Omega_{X/S}^1|_U := (\Omega_{A/k}^1)^\sim$  und  $d_{X/S}|_U := (d_{A/k})^\sim$ . Der  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\Omega_{X/S}^1$  heißt Garbe der **1-Differentialformen** und  $d_{X/S}$  das **äußere Differential**.

Beweis: [2], VI, 1.20.

## 16.2 Aussagen über Morphismen

**Definition 101** Sei  $B$  ein noetherscher Ring,  $I \subset B$  ein Ideal und  $A := B/I$ . Dann heißt  $A$  regulär eingebettet in  $B$ , wenn  $I$  von einer  $B$ -regulären Sequenz erzeugt wird.

**Satz 102** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein lokal geringter Raum, seien  $F', F, F''$  lokal freie  $\mathcal{O}_X$ -Moduln von endlichem Rang und sei

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\bigwedge^{\max} F' \otimes \bigwedge^{\max} F'' \rightarrow \bigwedge^{\max} F$$

Beweis: [2], VII, 3.12.

**Definition 103** Sei  $A$  ein Ring. Sei  $M$  ein  $A$ -Modul.  $M$  heißt flach genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Der Funktor  $N \mapsto M \otimes_A N$  ist exakt für alle  $A$ -Moduln  $N$ .
2. Für jedes endlich erzeugte Ideal  $a \subset A$  ist die Abbildung  $a \otimes M \rightarrow M$  injektiv.

**Definition 104** Seien  $(X, \mathcal{O}_X)$  und  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  lokal geringte Räume und  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus. Sei  $F$  ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul.  $F$  heißt **flach über  $Y$  im Punkt  $x$  von  $X$**  genau dann, wenn  $F_x$  ein flacher  $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$ -Modul ist, wobei  $F_x$  mittels  $f^\# : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$  als  $\mathcal{O}_{Y, f(x)}$ -Modul aufgefaßt wird.  $F$  heißt **flach über  $y \in Y$**  genau dann, wenn  $F$  flach über  $Y$  in jedem  $x \in f^{-1}(y)$  ist.  $F$  heißt **flach über  $Y$**  genau dann, wenn  $F$  flach über jedem  $y \in Y$  ist. Seien  $X$  und  $Y$  Schemata. Der Morphismus  $f : X \rightarrow Y$  heißt **flach** genau dann, wenn  $\mathcal{O}_X$  flach über  $Y$  ist.

**Definition 105** Sei  $X$  ein Schema und  $Y$  ein abgeschlossenes Unterschema von  $X$ . Die Codimension  $\text{codim}(X, Y)$  von  $Y$  in  $X$  ist definiert als  $\text{codim}(X, Y) := \inf \{ \dim(\mathcal{O}_{X, y}) \mid y \in Y \}$ .

**Definition 106** Seien  $X$  und  $Y$  lokal noethersche Schemata,  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus, lokal vom endlichen Typ. Sei  $x$  ein Punkt von  $X$ . Dann heißt  $f$  **unverzweigt in  $x$**  genau dann, wenn mit  $y := f(x)$  gilt  $m_x = m_y \mathcal{O}_{X, x}$  und  $k(x)$  eine endliche separable Körpererweiterung von  $k(y)$  ist.  $f$  heißt **unverzweigt** genau dann, wenn  $f$  in jedem  $x \in X$  unverzweigt ist.

**Definition 107** Seien  $X$  und  $Y$  lokal noethersche Schemata und  $f : X \rightarrow Y$  ein Morphismus, lokal vom endlichen Typ. Dann heißt  $f$  **étale** genau dann, wenn  $f$  flach und unverzweigt ist.

**Satz 108** Sei  $S$  ein lokal noethersches Schema,  $X$  ein  $S$ -Schema lokal vom endlichen Typ,  $Y$  ein abgeschlossenes  $S$ -Unterschema und  $J$  die Idealgarbe von  $Y$  in  $X$ . Sei  $x$  ein Punkt von  $Y$  und seien  $g_1, \dots, g_n$  globale Schnitte von  $\mathcal{O}_X$ . Sei  $X$  glatt über  $S$  in  $x$ . Dann ist äquivalent:

1. Es gibt eine offene Umgebung  $X_1$  von  $x$ , sodaß  $g_1, \dots, g_n$  einen étale Morphismus  $g : X_1 \rightarrow \mathbb{A}_S^n$  definieren und  $g_1, \dots, g_p$  erzeugen  $J$  auf  $X_1$ , d.h.  $Y_1 := Y \cap X_1$  ist die Faser des linearen Unterschemas  $\mathbb{A}_S^{n-p} \subset \mathbb{A}_S^n$ , d.h.  $Y_1 = Y \cap X_1 = g^{-1}(\mathbb{A}_S^{n-p})$ .

2.  $Y$  ist glatt über  $S$  in  $x$ .

$$g_{1,x}, \dots, g_{p,x} \in J_x$$

$dg_1(x), \dots, dg_n(x)$  bilden eine Basis von  $\Omega_{X/S}^1(x)$

$dg_{p+1}(x), \dots, dg_n(x)$  bilden eine Basis von  $\Omega_{Y/S}^1(x)$

3.  $g_{1,x}, \dots, g_{p,x}$  erzeugen  $J_x$

$dg_1(x), \dots, dg_n(x)$  bilden eine Basis von  $\Omega_{X/S}^1(x)$

4.  $Y$  ist glatt über  $S$  in  $x$ .

$g_{1,x}, \dots, g_{p,x}$  bilden ein minimales Erzeugendensystem von  $J_x$

$dg_{p+1}(x), \dots, dg_n(x)$  bilden eine Basis von  $\Omega_{Y/S}^1(x)$

Wenn diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, dann ist die folgende Sequenz in  $x$  exakt:

$$0 \rightarrow J/J^2 \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_Y \rightarrow \Omega_{Y/S}^1 \rightarrow 0$$

und  $J/J^2$  ist in  $x$  ein freier  $\mathcal{O}_Y$ -Modul dessen Basis von  $g_1, \dots, g_p$  induziert wird,  $\Omega_{X/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_Y$  ist in  $x$  ein freier  $\mathcal{O}_Y$ -Modul dessen Basis von  $dg_1, \dots, dg_n$  induziert wird und  $\Omega_{Y/S}^1$  ist in  $x$  ein freier  $\mathcal{O}_Y$ -Modul dessen Basis von  $dg_{p+1}, \dots, dg_n$  induziert wird.

Beweis: [2], VII, 5.7.

**Satz 109** Sei  $S$  ein lokal noethersches Schema,  $P$  ein  $S$ -Schema, lokal vom endlichen Typ. Sei  $n := \dim_x(P, S)$ . Sei  $X$  ein abgeschlossenes  $S$ -Unterschema von  $P$ ,  $x$  ein Punkt von  $X$  und  $J$  die Idealgarbe von  $X$  in  $P$ . Sei  $P$  glatt über  $S$  in  $x$ . Dann ist äquivalent:

1.  $X$  ist glatt über  $S$  in  $x$  und  $\dim_x(X, S) = n - p$

2. Es gibt eine offene Umgebung  $P_1$  von  $x$  in  $P$  und einen étale Morphismus  $g : P_1 \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ , sodaß  $X \cap P_1 = g^{-1}(\mathbb{A}_S^{n-p})$ .

3. Es gibt Erzeuger  $g_{1,x}, \dots, g_{p,x} \in J_x$ , sodaß  $dg_1(x), \dots, dg_p(x)$  linear unabhängig sind in  $\Omega_{P/S}^1(x)$ .

4. In  $x$  ist die folgende Sequenz eine exakte Sequenz von freien  $\mathcal{O}_X$ -Moduln:

$$0 \rightarrow J/J^2 \rightarrow \Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0$$

vom Rang  $p$  bzw.  $n$  bzw.  $n - p$ .

**Beweis.** Es gelte (1).  $\Omega_{P/S}^1$  ist frei in  $x$  mit Rang  $n$ ,  $\Omega_{X/S}^1$  ist frei in  $x$  mit Rang  $n - p$ . Seien  $g_{p+1,x}, \dots, g_{n,x} \in \mathcal{O}_{P,x}$ , sodaß  $dg_{p+1}(x), \dots, dg_n(x)$  eine Basis von  $\Omega_{X/S}^1(x)$  bilden. Nach Satz 98 ist die Sequenz

$$J/J^2 \rightarrow \Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0$$

exakt in  $x$ . Erweitere also  $dg_{p+1}(x), \dots, dg_n(x)$  zu einer Basis  $dg_1(x), \dots, dg_n(x)$  von  $\Omega_{P/S}^1$  mit  $g_{1,x}, \dots, g_{p,x} \in J_x$ . Damit sind die Bedingungen von Satz 108(2) erfüllt und damit folgt (2). (2) $\Rightarrow$ (1), (2) $\Rightarrow$ (3) und (2) $\Rightarrow$ (4) folgen auch aus Satz 108. Gelte nun (3): Ergänze  $dg_1(x), \dots, dg_p(x)$  zu einer Basis von  $\Omega_{P/S}^1(x)$ . Damit folgt (4) da in Satz 108 (3) erfüllt ist. Außerdem folgt (1) aus 108 ((3) $\Rightarrow$ (2)).

■

**Satz 110** Sei  $S$  ein lokal noethersches Schema. Sei  $P$  ein  $S$ -Schema lokal vom endlichen Typ. Sei  $X$  ein abgeschlossenes  $S$ -Unterschema von  $P$ . Sei  $X$  glatt über  $S$  in  $x$ . Dann gilt:

$P$  glatt über  $S$  in  $x \Rightarrow X$  regulär eingebettet in  $P$  in  $x$

**Beweis.** Sei  $P$  glatt über  $S$  in  $x$ . Nach Satz 109 gibt es eine offene Umgebung  $P_1$  von  $x$  in  $P$  und einen étale Morphismus  $g : P_1 \rightarrow \mathbb{A}_S^n$ , sodaß  $X_1 := X \cap P_1 = g^{-1}(\mathbb{A}_S^r)$  mit  $r = \dim_x(X, S)$  und  $n = \dim_x(P, S)$ . Da  $\mathbb{A}_S^r$  regulär in  $\mathbb{A}_S^n$  eingebettet ist und ein étale Morphismus flach ist, ist  $X$  regulär eingebettet in  $P$  in  $x$ . ■

## 16.3 Der Koszulkomplex

### 16.3.1 Projektive Auflösungen und Ext

1. Seien  $A$ -Moduln  $Z', Z, V', V$  und  $A$ -Modulhomomorphismen  $f : Z' \rightarrow Z$  und  $g : V \rightarrow V'$  gegeben. Sei der  $A$ -Modulhomomorphismus  $Hom(f, g) : Hom(Z, V) \rightarrow Hom(Z', V')$  gegeben durch  $Hom(f, g)(\phi) := g \circ \phi \circ f$  für  $\phi \in Hom(Z, V)$ .

Seien  $A$ -Moduln  $X$  und  $M$  gegeben und  $C_*$  eine projektive Auflöser von  $X$ . Dann erhält man eine Sequenz

$$\begin{aligned} Hom(C_*; M) : \dots \rightarrow Hom(C_n, M) \xrightarrow{Hom(d_n, id)} Hom(C_{n-1}, M) \rightarrow \dots \\ \dots \xrightarrow{Hom(d_0, id)} Hom(C_{-1}, M) \xrightarrow{Hom(d_{-1}, id)} Hom(C_{-2}, M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

mit  $id : M \rightarrow M$ ,  $id(y) = y$  und  $Hom(d_n, id) = id \circ \_ \circ d_n = \_ \circ d_n$ .

2. Seien  $A$ -Moduln  $X$  und  $M$  gegeben. Für zwei projektive Auflösungen  $C_*$  und  $D_*$  von  $X$  gilt

$$H^n(Hom(C_*; M)) \simeq H^n(Hom(D_*; M))$$

Damit hängt  $H^n(Hom(C_*; M))$  nur von  $X, M, A$  und  $n$  ab.

Beweis: [22], Ch. III, 3.1.

Damit ist  $Ext_A^n(X, M) := H^n(Hom(C_*; M))$  wohldefiniert.

### 16.3.2 Anwendung des Koszulkomplexes

Sei  $A$  ein Ring. Seien  $x_1, \dots, x_r \in A$ . Sei  $\underline{x} := (x_1, \dots, x_r)$ . Definiere den Koszulkomplex wie folgt: Sei

$$\begin{aligned} K_p(\underline{x}) &:= \bigwedge^p \left( \bigoplus_{i=1}^r Ae_i \right) \quad \text{für } p = 0, \dots, r \\ K_p(\underline{x}) &:= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

$\bigoplus_{i=1}^r Ae_i$  der freie  $A$ -Modul mit Basis  $e_1, \dots, e_r$ . Sei die Randabbildung  $d_p : K_p(\underline{x}) \rightarrow K_{p-1}(\underline{x})$  gegeben durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren:

$$d_p(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) := \sum_{j=1}^p (-1)^j x_{i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{j-1}} \wedge e_{i_{j+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$



Sei dazu  $a \in K^r(\underline{x}; M)$  mit  $\varphi'_x(a) \in IM$ . Stelle dar  $a(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = \sum_{j=1}^r x_j y_j$  mit geeigneten  $y_j \in M$ . Sei

$$b : K_{r-1}(\underline{x}) = \bigwedge^{r-1} \left( \bigoplus_{i=1}^r Ae_i \right) \rightarrow M$$

$$b(e_1 \wedge \dots \wedge e_{j-1} \wedge e_{j+1} \wedge \dots \wedge e_r) := (-1)^j y_j$$

also  $b \in \text{Hom}_A(K_{r-1}(\underline{x}); M)$  und  $d(b) = b \circ d_r = a$ , denn

$$b(d_r(e_1 \wedge \dots \wedge e_r)) = b \left( \sum_{j=1}^r (-1)^j x_j e_1 \wedge \dots \wedge e_{j-1} \wedge e_{j+1} \wedge \dots \wedge e_r \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^r (-1)^j x_j (-1)^j y_j = \sum_{j=1}^r x_j y_j$$

Damit ist also  $\varphi_x$  injektiv. ■

**Lemma 113** *Sei  $A$  ein Ring. Sei  $M$  ein  $A$ -Modul. Sei  $I \subset A$  ein Ideal. Seien  $(x_1, \dots, x_r)$  und  $(y_1, \dots, y_r)$  zwei  $A$ -reguläre Sequenzen mit  $I =_A \langle x_1, \dots, x_r \rangle =_A \langle y_1, \dots, y_r \rangle$  und sei  $y_i = \sum c_{ij} x_j$  mit  $c := ((c_{ij}))_{i,j} \in A_{r,r}$ . Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} & & M/IM \\ & \nearrow \varphi_x & \\ \text{Ext}_A^r(A/I, M) & & \downarrow \det((c_{ij}))_{i,j} \\ & \searrow \varphi_y & \\ & & M/IM \end{array}$$

**Beweis.** Da  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_r)$  und  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_r)$   $A$ -reguläre Sequenzen sind gilt  $H^r(\underline{x}; M) \simeq M/IM \simeq H^r(\underline{y}; M)$  nach Lemma 112. Außerdem  $\text{Ext}_A^r(A/I, M) = H^r(\text{Hom}_A(K_*(\underline{x}); M)) = H^r(K^*(\underline{x}; M)) = H^r(\underline{x}; M)$ , denn  $K_*(\underline{x})$  ist eine Auflösung von  $A/I$ . Man hat den Isomorphismus  $\bigwedge^* c : K_*(\underline{y}) \rightarrow K_*(\underline{x})$  und  $\bigwedge^r c = \det((c_{ij}))_{i,j}$ . ■

## 16.4 Die Garbe $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^q(F, G)$

**Lemma 114** *Sei  $X$  ein lokal noethersches Schema und  $F$  und  $G$  zwei kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Moduln. Für die rechtsabgeleiteten Funktoren  $\underline{\text{Ext}}^q(F, -)$  von  $\underline{\text{Hom}}(F, -)$  gilt für alle  $q$ :*

1.  $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^q(F, G)$  ist kohärent.
2. Wenn  $X = \text{Spec}(A)$ ,  $F = \widetilde{M}$  und  $G = \widetilde{N}$ , dann ist  $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^q(F, G) = \text{Ext}_A^q(M, N)^\sim$
3. Für alle  $x \in X$  gilt  $(\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_X}^q(F, G))_x = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^q(F_x, G_x)$

*Beweis:* [2], IV, 3.2.

## 16.5 Bestimmung von $\Omega_{X/S}^r$

**Satz 115** Sei  $P$  ein  $S$ -Schema,  $X$  ein abgeschlossenes  $S$ -Unterschema von  $P$ . Sei  $r := \text{codim}(X, P)$ . Sei  $J$  die Idealgarbe von  $X$ . Sei  $F$  ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Sei  $X$  regulär eingebettet in  $P$ . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_P}^r(\mathcal{O}_X, F) \simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\wedge^r(J/J^2), F/JF)$$

**Beweis.** Sei  $U = \text{Spec}(A)$  eine affine offene Teilmenge von  $P$  auf der  $J$  ein reguläres Ideal ist. Sei  $M = F(U)$ . Sei  $I = J(U)$ . Dann gibt es eine  $A$ -reguläre Sequenz  $\underline{x} := (x_1, \dots, x_r)$  mit  $I = {}_A\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ .  $I/I^2$  ist frei vom Rang  $r$  über  $A/I$ . Sei  $x'_i$  die Restklasse von  $x_i$  in  $I/I^2$ .  $x'_1 \wedge \dots \wedge x'_r$  erzeugt dann  $\wedge^r(I/I^2)$ . Betrachte den Koszulkomplex  $K_*(\underline{x}; M)$  und verwende die Notation aus Lemma 112. Definiere

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Ext}_A^r(A/I, M) &\simeq H^r(\underline{x}; M) \rightarrow \text{Hom}_{A/I}(\wedge^r(I/I^2), M/IM) \\ &a \mapsto \varphi(a) \\ \text{mit } \varphi(a)(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_r) &:= \varphi_{\underline{x}}(a) \end{aligned}$$

Sei  $\underline{y} := (y_1, \dots, y_r)$  eine weitere  $A$ -reguläre Sequenz mit  $I = {}_A\langle y_1, \dots, y_r \rangle$ . Also gibt es  $((c_{ij}))_{i,j} \in A_{r,r}$  mit  $y_i = \sum c_{ij}x_j$ . Dann gilt  $y_1 \wedge \dots \wedge y_r = \det((c_{ij}))x_1 \wedge \dots \wedge x_r$  also mit Lemma 113

$$\begin{aligned} \varphi(a)(y'_1 \wedge \dots \wedge y'_r) &= \det((c_{ij}))\varphi(a)(x'_1 \wedge \dots \wedge x'_r) = \det((c_{ij}))\varphi_{\underline{x}}(a) \\ &= \varphi_{\underline{y}}(a) \end{aligned}$$

Damit ist  $\varphi$  unabhängig von der Wahl der  $A$ -regulären Sequenz, die  $I$  erzeugt.  $\varphi$  ist nach Lemma 112 ein Isomorphismus. Mit Lemma 114 folgt die Behauptung. ■

**Lemma 116** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein geringter Raum. Sei  $E$  ein lokal freier  $\mathcal{O}_X$ -Modul von endlichem Rang und

$$E^\vee := \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(E, \mathcal{O}_X)$$

Dann gilt für jeden  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $F$ , daß

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(E, F) = E^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} F$$

*Beweis:* [2], IV, 3.4.

**Satz 117** Sei  $P$  ein  $S$ -Schema und  $X$  ein abgeschlossenes  $S$ -Unterschema von  $P$ . Seien  $P$  und  $X$  glatt über  $S$ . Sei  $n := \dim(P, S)$  und  $r := \dim(X, S)$ . Dann gilt:

$$\Omega_{X/S}^r = \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_P}^{n-r}(\mathcal{O}_X, \Omega_{P/S}^n)$$

**Beweis.** Satz 110 liefert, daß  $X$  regulär eingebettet ist in  $P$ .  $\Omega_{P/S}^n$  ist ein quasikohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Damit gilt mit Satz 115, daß

$$\begin{aligned} \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_P}^{n-r}(\mathcal{O}_X, \Omega_{P/S}^n) &\simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\wedge^{n-r}(J/J^2), \Omega_{P/S}^n/J\Omega_{P/S}^n) \simeq \\ &\simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\wedge^{n-r}(J/J^2), \Omega_{P/S}^n \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

wobei  $J$  die Idealgarbe von  $X$  in  $P$  sei. Mit Lemma 116 hat man also:

$$\begin{aligned} \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_P}^{n-r}(\mathcal{O}_X, \Omega_{P/S}^n) &\simeq \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Lambda^{n-r}(J/J^2), \Omega_{P/S}^n \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_X) \\ &\simeq (\Lambda^{n-r}(J/J^2))^\vee \otimes_{\mathcal{O}_P} \Omega_{P/S}^n \end{aligned}$$

Da  $X$  glatt über  $S$  ist erhält man mit Satz 109 die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow J/J^2 \rightarrow \Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \Lambda^{\max} J/J^2 &= \Lambda^{n-r} J/J^2 \\ \Lambda^{\max}(\Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_X) &= \Lambda^n(\Omega_{P/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_X) \\ \Lambda^{\max} \Omega_{X/S}^1 &= \Lambda^r \Omega_{X/S}^1 = \Omega_{X/S}^r \end{aligned}$$

Mit Satz 102 hat man also einen kanonischen Isomorphismus

$$(\Lambda^{n-r} J/J^2)^\vee \otimes_{\mathcal{O}_P} \Omega_{P/S}^n \simeq \Omega_{X/S}^r$$

und damit

$$\Omega_{X/S}^r \simeq (\Lambda^{n-r}(J/J^2))^\vee \otimes_{\mathcal{O}_P} \Omega_{P/S}^n \simeq \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_P}^{n-r}(\mathcal{O}_X, \Omega_{P/S}^n)$$

■

**Corollar 118** Sei  $X$  ein abgeschlossenes  $S$ -Unterschema von  $P = \mathbb{P}^n(S)$ . Sei  $X$  glatt über  $S$ . Sei  $r := \dim(X, S)$ . Dann gilt:

$$\Omega_{X/S}^r = \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_P}^{n-r}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_P(-n-1))$$

denn  $\Omega_{P/S}^n = \mathcal{O}_P(-n-1)$ .

## 16.6 Anwendung für rationale Normkurven

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper mit  $\text{char}(k) = 0$  und  $S = \text{Spec}(k)$ . Dann gilt für eine irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve  $C \subset \mathbb{P}_k^n$ , daß

$$\underline{\Omega}_C = \underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}}^{n-1}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(-n-1))$$

Sei nun  $C \subset \mathbb{P}_k^n$  eine rationale Normkurve,  $n \geq 3$  und  $R = k[X_0, \dots, X_n]$ . Dann gilt  $H(m, R/I(C)) = nm+1$  [18],  $I(C) = \langle (I(C))_2 \rangle$  und  $\dim((I(C))_2) = \binom{2+n}{n} - 2n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ .

Sei  $K$  ein kanonischer Divisor von  $C \subset \mathbb{P}_k^n$ , also  $K = -P_1 - P_2$  mit  $P_1, P_2 \in C$ . Sei  $H$  ein Schnitt von  $C$  mit einer Hyperebene. Sei  $\mathcal{A} = |H - P_1 - P_2|$ . Also  $\text{deg } \mathcal{A} = n - 2$  und  $\dim \mathcal{A} = n - 2$ . Es gilt  $\text{deg } \mathcal{A} = n - 2 \geq 2p(C) + 1$ , also  $\mathcal{A}$  very ample.  $\mathcal{A}$  induziert einen Isomorphismus  $\Phi : C \rightarrow C'$  auf eine nichtsinguläre rationale Normkurve  $C' \subset \mathbb{P}_k^{n-2}$ .

Sei  $\text{Ext}^{n-1}(R/I(C), R(-n-1)) = \text{coker } M^T$  mit  $M \in R_{r,n-1}$  (es gilt  $r = n(n-2)$ ), d.h. dieser  $R$ -Modul hat als Relationen zwischen seinen  $n-1$  Erzeugern die Zeilen von  $M$ . Sei  $\overline{M} := M \otimes R/I(C)$  und sei

$$\ker(\overline{M}) = \text{image} \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_0^0 & \cdots & \varphi_0^s \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n-2}^0 & \cdots & \varphi_{n-2}^s \end{pmatrix}}_{\in (R/I(C))_{n-1,s}}$$

d.h.  $\ker(\overline{M})$  ist der Untermodul von  $(R/I(C))^{n-1}$  erzeugt von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}^0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \varphi_0^s \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}^s \end{pmatrix}. \text{ Sei } \varphi^i := (\varphi_0^i : \dots : \varphi_{n-2}^i), U_i := C \setminus B_i \text{ mit } B_i :=$$

$V(\varphi_0^i, \dots, \varphi_{n-2}^i) \subset C$  und  $V_i := \varphi^i(U_i)$ .  $\varphi^i : U_i \rightarrow V_i$  ist ein Isomorphismus für  $i = 0, \dots, s$ , jedes  $\varphi^i$  repräsentiert die gleiche birationale Transformation,  $C = \bigcup_i U_i$  und diese birationale Transformation ist der Isomorphismus  $\Phi$ . Sei  $y := (Y_0, \dots, Y_{n-2})^T$  und  $R' := k[Y_0, \dots, Y_{n-2}]$ . Es gilt

$$I(G(\Phi)) = ((\langle My \rangle : \langle X_0, \dots, X_n \rangle^\infty) : \langle Y_0, \dots, Y_{n-2} \rangle^\infty)$$

$I(C') = \ker(\alpha_i)$  mit  $\alpha_i : R' \rightarrow R/I(C)$ ,  $\alpha_i(Y_j) = \varphi_j^i$  für alle  $i = 0, \dots, s$ . Ebenso gilt für alle  $i = 0, \dots, s$

$$I(G(\Phi)) = \left( (I(C) + \langle Y_l \overline{\varphi}_j^i - Y_j \overline{\varphi}_l^i \mid l, j = 0, \dots, n-2, l \neq j \rangle) : \langle \overline{\varphi}_0^i, \dots, \overline{\varphi}_{n-2}^i \rangle^\infty \right)$$

mit  $\overline{\varphi}_0^i, \dots, \overline{\varphi}_{n-2}^i \in R$  Repräsentanten von  $\varphi_0^i, \dots, \varphi_{n-2}^i$  mit  $\text{deg}(\overline{\varphi}_j^i) = 1$ .

Sei  $x := (X_0, \dots, X_n)^T$ . Sei  $\Psi : C' \rightarrow C$  der Umkehrisomorphismus von  $\Phi$ .  $I(G(\Phi))$  enthält die in  $X_0, \dots, X_n$  (und  $Y_0, \dots, Y_{n-2}$ ) linearen Gleichungen  $My = 0$ . Schreibe diese als  $Nx = 0$  mit  $N \in R'_{r,n+1}$ , sei  $\overline{N} = N \otimes R'/I(C')$  und sei

$$\ker(\overline{N}) = \text{image} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_0^0 & \cdots & \psi_0^t \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_n^0 & \cdots & \psi_n^t \end{pmatrix}}_{\in (R'/I(C'))_{n+1,t}}$$

Sei  $\psi^i := (\psi_0^i : \dots : \psi_n^i)$ ,  $U'_i := C' \setminus B'_i$  mit  $B'_i := V(\psi_0^i, \dots, \psi_n^i) \subset C'$  und  $V'_i := \psi^i(U'_i)$ .  $\psi^i : U'_i \rightarrow V'_i$  ist ein Isomorphismus für  $i = 0, \dots, t$ , jedes  $\psi^i$  repräsentiert die gleiche birationale Transformation,  $C' = \bigcup_i U'_i$  und diese birationale Transformation ist der Isomorphismus  $\Psi$ . Es gilt für  $i = 0, \dots, t$ , daß  $I(C) = \ker(\beta_i)$  mit  $\beta_i : k[X_0, \dots, X_n] \rightarrow R'/I(C')$ ,  $\beta_i(X_j) = \psi_j^i$ . Ebenso gilt für alle  $i = 0, \dots, t$

$$I(G(\Psi)) = \left( (I(C') + \langle X_l \overline{\psi}_j^i - Y_j \overline{\psi}_l^i \mid l, j = 0, \dots, n, l \neq j \rangle) : \langle \overline{\psi}_0^i, \dots, \overline{\psi}_n^i \rangle^\infty \right)$$

mit  $\overline{\psi}_0^i, \dots, \overline{\psi}_n^i \in R'$  Repräsentanten von  $\psi_0^i, \dots, \psi_n^i$  homogen vom gleichen Grad.

1. Hat man also eine rationale Normkurve  $C \subset \mathbb{P}_k^n$  gegeben kann man eine rationale Normkurve  $C' \subset \mathbb{P}_k^{n-2}$  und eine birationale Transformation  $\varphi : C \rightarrow C'$  angeben.

Iterativ bekommt man, wenn eine rationale Normkurve  $C_n \subset \mathbb{P}_k^n$  gegeben ist:

- (a) Für  $n$  ungerade: eine Folge von Isomorphismen  $C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_3} \mathbb{P}_k^1$ ,  $C_i \subset \mathbb{P}_k^i$ , also einen Isomorphismus  $\Psi' : C_n \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ ,  $\Psi' = \varphi_3 \circ \dots \circ \varphi_n$ . Mit dem oben beschriebenen Verfahren bekommt man eine Kollektion von Repräsentanten von  $\Psi'$  gegeben durch  $(\Psi'_{j,0} : \Psi'_{j,1})$ ,  $j = 1, \dots, l$  mit  $\Psi'_{j,i} \in k[C_n]$  mit Definitionsbereich  $U_j \subset C_n$ , sodaß  $\bigcup_{j=1}^l U_j = C_n$ . Gemäß Abschnitt 12 erhält man einen Isomorphismus  $\Psi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow C$ .
- (b) Für  $n$  gerade: eine Folge von Isomorphismen  $C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_4} C_2$ ,  $C_i \subset \mathbb{P}_k^i$ ,  $C_2 \subset \mathbb{P}_k^2$  eine Konik, also einen Isomorphismus  $\Psi' : C_n \rightarrow C_2$ ,  $\Psi' = \varphi_4 \circ \dots \circ \varphi_n$ . Mit dem oben beschriebenen Verfahren bekommt man eine Kollektion von Repräsentanten von  $\Psi'$  gegeben durch  $(\Psi'_{j,0} : \Psi'_{j,1} : \Psi'_{j,2})$ ,  $j = 1, \dots, l$  mit  $\Psi'_{j,i} \in k[C_n]$  mit Definitionsbereich  $U_j \subset C_n$ , sodaß  $\bigcup_{j=1}^l U_j = C_n$ . Gemäß Abschnitt 12 erhält man einen Isomorphismus  $\Psi : C_2 \rightarrow C_n$ .

Praktisch verwendet man diese Vorgehensweise, um einen Isomorphismus  $\Psi' : C_n \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  bzw.  $\Psi' : C_n \rightarrow C_2$  anzugeben. Man beachte: Falls  $I(C_n) \subset K[X_0, \dots, X_n]$  mit  $K \subset k$  ein Unterkörper, dann haben die, mit den oben beschriebenen Verfahren berechneten, Repräsentanten von  $\Psi'$  und  $\Psi$  und Parametrisierungen  $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow C_n$  bzw.  $C_2 \rightarrow C_n$  auch Koeffizienten in  $K$ .

Will man eine Parametrisierung von  $C_n$  über  $\mathbb{P}_k^1$  bzw. über einer Konik  $C_2$ , d.h. Isomorphismen  $\Psi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow C_n$  bzw.  $\Psi : C_2 \rightarrow C_n$  geht man folgendermaßen vor:

2. Sei eine rationale Normkurve  $C \subset \mathbb{P}_k^n$  gegeben,  $R = k[X_0, \dots, X_n]$ ,  $R' := k[Y_0, \dots, Y_{n-2}]$ . Schreibe  $\text{Ext}^{n-1}(R/I(C), R(-n-1)) = \text{coker } M^T$  mit  $M \in R_{r,n-1}$ .  $\deg(M_{i,j}) = 1$ . Wie oben sei  $\Phi : C \rightarrow C' \subset \mathbb{P}_k^{n-2}$  der von  $M$  induzierte Isomorphismus mit einer rationalen Normkurve  $C'$  und seien wie oben  $\varphi^i := (\varphi_0^i : \dots : \varphi_{n-2}^i)$  die Repräsentanten, die man als Erzeuger von  $\ker \overline{M}$  mit  $\overline{M} := M \otimes R/I(C)$  erhält.  $I(C')$  bekommt man als  $I(C') = \ker(\alpha_i)$  mit  $\alpha_i : R' \rightarrow R/I(C)$ ,  $\alpha_i(Y_j) = \varphi_j^i$  für alle  $i = 0, \dots, s$ . Schreibe mit  $y := (Y_0, \dots, Y_{n-2})^T$  und  $x := (X_0, \dots, X_n)^T$

$$My = Nx$$

wobei  $N \in (R')_{r,n+1}$ .

- (a) Für  $n$  ungerade:

Sei eine Parametrisierung  $\gamma' = (\gamma'_0 : \dots : \gamma'_{n-2}) : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow C'$  von  $C'$  gegeben mit  $\gamma'_i \in k[T_0, T_1]$ . Einsetzen der Parametrisierung in  $N$

liefert  $\overline{N} := N(\gamma'_0, \dots, \gamma'_{n-2})$ . Dann gilt  $\ker(\overline{N}) = \text{image} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

mit  $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in k[T_0, T_1]$  und  $\gamma := (\gamma_0 : \dots : \gamma_n) : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow C$  ist eine Parametrisierung von  $C$ .

(b) Für  $n$  gerade:

Sei eine Parametrisierung  $\gamma' = (\gamma'_0 : \dots : \gamma'_{n-2}) : C_2 \rightarrow C'$  von  $C'$  über einer Konik  $C_2 \subset \mathbb{P}_k^2$  gegeben mit  $\gamma'_i \in k[C_2]$ . Einsetzen der Parametrisierung in  $N$  liefert  $\overline{N} := N(\gamma'_0, \dots, \gamma'_{n-2})$ . Dann gilt  $\ker(\overline{N}) =$

$\text{image} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$  mit  $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in k[C_2]$  und  $\gamma := (\gamma_0 : \dots : \gamma_n) : C_2 \rightarrow C$  ist eine Parametrisierung von  $C$  über  $C_2$ .

Iterativ bekommt man für eine rationale Normkurve  $C_n \subset \mathbb{P}_k^n$  eine Folge von Isomorphismen  $C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_3} \mathbb{P}_k^1$  bzw.  $C_n \xrightarrow{\varphi_n} C_{n-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_2} C_2$ ,  $C_i \subset \mathbb{P}_k^i$ ,  $C_2 \subset \mathbb{P}_k^2$  und dann schrittweise Parametrisierungen von  $C_4, \dots, C_n$  über  $C_2$  bzw.  $C_3, \dots, C_n$  für  $n$  gerade bzw. ungerade. Man hat also folgenden Algorithmus, um eine Parametrisierung einer rationalen Normkurve zu berechnen:

**Algorithmus 119** Sei  $K$  ein Unterkörper von  $k$ ,  $n \geq 3$ . Sei  $C \subset \mathbb{P}_k^n$  eine rationale Normkurve, also ist  $I(C) =_k \langle q_1, \dots, q_l \rangle$  mit  $\deg(q_i) = 2$  und  $l = \frac{n(n-1)}{2}$ . Es seien  $q_1, \dots, q_l \in K[X_0, \dots, X_n]$ .

(a)  $i := n$ ,  $I_n :=_K \langle q_1, \dots, q_l \rangle$ .

(b) Solange  $i \geq 3$  ist:

i.  $R := K[X_0, \dots, X_i]$ ,  $R' := K[Y_0, \dots, X_{i-2}]$ .

ii. Berechne  $\text{coker } M_i^T := \text{Ext}^{i-1}(R/I_i, R(-i-1))$ .

iii. Berechne einen Kernvektor  $(\varphi_0, \dots, \varphi_{i-2})^T$  von  $M_i \otimes R/I_i$ , also  $\varphi_j \in R/I_i$ .

iv. Setze  $\alpha : R' \rightarrow R/I_i$ ,  $\alpha(Y_j) := \varphi_j$   
und  $I_{i-2} := \ker(\alpha)$

v. Ersetze  $Y$  durch  $X$  in  $I_{i-2}$ .

vi.  $i := i - 2$ .

(c) Ist  $i = 2$ , dann ersetze  $X$  durch  $Y$  in  $I_2$  und setze  $R := K[Y_0, Y_1, Y_2]$ .

(d)  $i := i + 2$

(e) Solange  $i \leq n$  ist:

i. Schreibe  $Nx := M_i y$  mit  $x = (X_0, \dots, X_i)^T$  und  $y = (Y_0, \dots, Y_{i-2})^T$

ii. Ist  $i = 3$  dann setze  $\gamma := (T_0, T_1)$ .

iii. Ist  $i = 4$  dann setze  $\overline{N} := N \otimes R/I_2$  sonst  $\overline{N} := N(\gamma)$ .

(für  $n$  gerade hat also  $\overline{N}$  stets Einträge in  $R/I_2$ , für  $n$  ungerade in  $K[T_0, T_1]$ ).

iv. Setze  $\gamma := \ker(\overline{N})$ .

v.  $i := i + 2$ .

(f)  $\gamma$  eine Parametrisierung von  $C$  über dem  $\mathbb{P}_k^1$  für  $n$  ungerade und über der Konik  $C_2 = V(I_2)$  für  $n$  gerade.

## 17 Suche aller rationalen Punkte auf $C$

Sei  $C = V_{\mathbb{C}}(f) = \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid f(P) = 0\}$  mit  $f \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$  mit  $\deg(f) = n$  irreduzibel eine rationale ebene Kurve.

1. Ist  $n$  ungerade erhält man mit den oben beschriebenen Verfahren eine birationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$  mit Definitionsbereich  $C \setminus \text{Sing}(C)$ , denn man hat eine birationale Transformation  $\varphi : C \rightarrow C_{n-2}$  von  $C$  mit Definitionsbereich  $C \setminus \text{Sing}(C)$  auf eine nichtsinguläre Kurve  $C_{n-2} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-2}$  gegeben durch  $(\varphi_0 : \dots : \varphi_{n-2})$  mit  $\varphi_i \in k[C]$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  und einen Isomorphismus  $\Psi' : C_{n-2} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , für den gemäß Abschnitt 16.6 Repräsentanten  $(\Psi'_{j,0} : \Psi'_{j,1})$ ,  $j = 1, \dots, s$  mit  $\Psi'_{j,i} \in k[C_{n-2}]$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  und Definitionsbereich  $U_j \subset C_{n-2}$  existieren, sodaß  $\bigcup_{j=1}^s U_j = C_{n-2}$ . Damit kann man für  $\Phi = \Psi' \circ \varphi$  eine Kollektion von Repräsentanten  $(\Phi_{j,0} : \Phi_{j,1})$ ,  $j = 1, \dots, s$  mit  $\Phi_{j,i} \in k[C]$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  und Definitionsbereich  $V_j \subset C$ , sodaß  $\bigcup_{j=1}^s V_j = C \setminus \text{Sing}(C)$ . Schließlich bekommt man einen birationalen Morphismus  $\psi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow C$ , gegeben durch einen Repräsentanten  $(\psi_0 : \psi_1 : \psi_2)$  mit  $\psi_i \in \mathbb{Q}[S, T]$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Da jeder rationale Punkt  $Q \in C \setminus \text{Sing}(C)$  durch  $\Phi$  auf einen rationalen Punkt  $Q' \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  abgebildet wird und  $Q'$  durch  $\psi$  wieder auf  $Q$  abgebildet wird, liefert  $\psi$  alle rationalen Punkte von  $C \setminus \text{Sing}(C)$ , wenn man rationale Punkte von  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  einsetzt. Die rationalen Punkte unter den Singularitäten können mit der Standardzerlegung bestimmt werden, indem man sie darstellt als

$$\{(m_0(a_0, a_1) : m_1(a_0, a_1) : m_2(a_0, a_1)) \mid A(a_0, a_1) = 0\}$$

mit  $m_0, m_1, m_2, A \in \mathbb{Q}[a_0, a_1]$  homogen,  $m_0, m_1, m_2$  vom gleichen Grad. Die rationalen Nullstellen von  $A$  liefern dann die rationalen Punkte unter den Singularitäten. Eine rationale Singularität von  $C$  erhält man schon durch  $\psi$ , falls eine ihrer Puiseuxentwicklung rational ist.

2. Ist  $n$  gerade erhält man mit den oben beschriebenen Verfahren eine birationale Transformation  $\Phi : C \rightarrow C_2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  mit Definitionsbereich  $C \setminus \text{Sing}(C)$ , denn man hat eine birationale Transformation  $\varphi : C \rightarrow C_{n-2}$  von  $C$  mit Definitionsbereich  $C \setminus \text{Sing}(C)$  auf eine nichtsinguläre Kurve  $C_{n-2} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-2}$  gegeben durch  $(\varphi_0 : \dots : \varphi_{n-2})$  mit  $\varphi_i \in \mathbb{C}[C]$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  und einen Isomorphismus  $\Psi' : C_{n-2} \rightarrow C_2$ , für den gemäß Abschnitt 16.6 Repräsentanten  $(\Psi'_{j,0} : \Psi'_{j,1} : \Psi'_{j,2})$ ,  $j = 1, \dots, s$  mit  $\Psi'_{j,i} \in \mathbb{C}[C_{n-2}]$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  und Definitionsbereich  $U_j \subset C_{n-2}$  existieren, sodaß  $\bigcup_{j=1}^s U_j = C_{n-2}$ . Damit kann man für  $\Phi = \Psi' \circ \varphi$  eine Kollektion von Repräsentanten  $(\Phi_{j,0} : \Phi_{j,1} : \Phi_{j,2})$ ,  $j = 1, \dots, s$  mit  $\Phi_{j,i} \in \mathbb{C}[C]$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  und Definitionsbereich  $V_j \subset C$ , sodaß  $\bigcup_{j=1}^s V_j = C \setminus \text{Sing}(C)$ . Schließlich bekommt man einen birationalen Morphismus  $\psi : C_2 \rightarrow C$ , gegeben durch einen Repräsentanten  $(\psi_0 : \psi_1 : \psi_2)$  mit  $\psi_i \in \mathbb{C}[C_2]$ ,  $i = 0, 1, 2$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$ . Da jeder rationale Punkt  $Q \in C \setminus \text{Sing}(C)$  von  $C$  durch  $\Phi$  auf einen rationalen Punkt  $Q' \in C_2$  abgebildet wird und  $Q'$  durch  $\psi$  wieder auf  $Q$  abgebildet wird, liefert  $\psi$  alle rationalen Punkte von  $C \setminus \text{Sing}(C)$ , wenn man alle rationalen Punkte von  $C_2$  einsetzt. Die rationalen Punkte unter den Singularitäten können wieder mit der Standardzerlegung bestimmt werden.

## 18 Optimierung der Höhe von Parametrisierungen

Sei  $k = \mathbb{C}$ . Sei  $C \subset \mathbb{P}_k^2$  eine rationale Kurve und habe  $C$  eine Parametrisierung gegeben durch  $\Phi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow C$ ,  $\Phi(t_0, t_1) = (\phi_0(t_0, t_1) : \phi_1(t_0, t_1) : \phi_2(t_0, t_1))$  mit  $\phi_l \in \mathbb{Z}[T_0, T_1]$  homogen  $\deg(\phi_l) = n$ .

1. Schreibe  $\phi_l = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=n}}^n a_{l,i,j} T_0^i T_1^j$ . Teile  $\phi_l$ ,  $l = 0, 1, 2$  zunächst durch den

$$ggT(a_{l,i,j} \mid i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i + j = n, l = 0, 1, 2)$$

Prüfe dann, ob es  $d, e \in \mathbb{Z}$  gibt mit

$$\begin{array}{cc} d^n \mid a_{l,0,n} & e^n \mid a_{l,n,0} \\ d^{n-1} \mid a_{l,1,n-1} & e^{n-1} \mid a_{l,n-1,1} \\ \vdots & \vdots \\ d \mid a_{l,n-1,1} & e \mid a_{l,1,n-1} \end{array}$$

für  $l = 0, 1, 2$ . Falls es solche  $d, e$  gibt, betrachte dann den Isomorphismus  $\Lambda : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ ,  $(t_0, t_1) \mapsto (\frac{t_0}{e}, \frac{t_1}{d})$ . Dann ist  $\Psi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow C$ ,  $\Psi := \Phi \circ \Lambda$  wieder eine Parametrisierung von  $C$  mit  $\Psi(t_0, t_1) = (\psi_0(t_0, t_1) : \psi_1(t_0, t_1) : \psi_2(t_0, t_1))$  mit  $\psi_l = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=n}}^n \frac{a_{l,i,j}}{e^i d^j} T_0^i T_1^j \in \mathbb{Z}[T_0, T_1]$  mit entsprechend kleineren Koeffizienten.

2. Wenn eines der  $\psi_l$  einen Linearfaktor abspaltet, d.h.  $\psi_i = (aT_0 + bT_1) \varphi$  mit  $\varphi \in \mathbb{Z}[T_0, T_1]$ ,  $\deg(\varphi) = n - 1$  und  $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , dann betrachte den Isomorphismus  $\Lambda' : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ ,  $(t_0, t_1) \mapsto (t_0, t_1 - \frac{a}{b}t_0)$ . Dann ist  $\Psi' : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow C$ ,  $\Psi' := \Psi \circ \Lambda'$  wieder eine Parametrisierung von  $C$  mit  $\Psi'(t_0, t_1) = (\psi'_0(t_0, t_1) : \psi'_1(t_0, t_1) : \psi'_2(t_0, t_1))$ ,  $\psi'_l \in \mathbb{Z}[T_0, T_1]$  für  $l = 0, 1, 2$  und  $\psi'_i = bT_1\varphi$ . Man wendet nun nochmals (1.) an.
3. Dasselbe Verfahren kann auch für eine rationale Kurve  $C \subset \mathbb{P}_k^n$  angewendet werden, wenn eine Parametrisierung  $\Phi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow C$ ,  $\Phi(t_0, t_1) = (\phi_0(t_0, t_1) : \dots : \phi_n(t_0, t_1))$  mit  $\phi_l \in \mathbb{Z}[T_0, T_1]$  homogen vom gleichen Grad, gegeben ist, es sind nur statt 3 nun  $n$  Polynome zu berücksichtigen.

### Teil III

## Parametrisierungsverfahren für ebene rationale Kurven

Sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) = 0$ ,  $L$  ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von  $\overline{K}$ ,  $F \in K[X_0, X_1, X_2]$  und  $F$  irreduzibel über  $L$ ,  $\deg(F) = n$ ,  $C = V_L(F)$  und  $p(C) = 0$ . Praktisch ist  $K = \mathbb{Q}$  und  $L = \mathbb{C}$ . Sei  $n \geq 2$  ( $n = 1$  ist trivial, man beachte, daß  $F$  Koeffizienten in  $K$  hat).

## 19 Parametrisierung mit einem $g_{n-2}^{n-2}$ und rationalen Normkurven

### 19.1 Berechnung des adjungierten Ideals

Erzeuger von  $\mathfrak{G}$  in  $K[X_0, X_1, X_2]$  kann man mit den oben besprochenen Verfahren berechnen. Eine Basis von  $\mathfrak{G}_{n-2}$  schneidet auf  $C$  über  $L$  einen  $g_{n-2}^{n-2}$  aus. Verfahren zur Berechnung von Erzeugern von  $\mathfrak{G}$  in  $K[X_0, X_1, X_2]$ :

- Birationale Transformation auf eine ebene Kurve mit gewöhnlichen Mehrfachpunkten und Gleichung mit Koeffizienten in  $K$  gemäß Abschnitt 10.3 und Berechnung des adjungierten Ideals mittels Saturierung gemäß Abschnitt 11.4.
- Birationale Transformation auf eine ebene Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten und Gleichung mit Koeffizienten in  $K$  gemäß Abschnitt 10.3 und Berechnung des adjungierten Ideals aus der Standardzerlegung der Singularitäten gemäß Abschnitt 11.2
- Berechnung des adjungierten Ideals aus einer Ganzheitsbasis gemäß Abschnitt 11.1
- Falls  $C$  nur gewöhnliche Doppelpunkte hat, Berechnung des adjungierten Ideals aus der freien Auflösung des Jacobiideals gemäß Abschnitt 11.3.

### 19.2 Transformation auf eine rationale Normkurve und Bestimmung eines $g_1^1$

Sei  $\mathfrak{G}_{n-2} = {}_L \langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle$ ,  $A_i \in K[X_0, X_1, X_2]$ .  $\Phi : C \rightarrow C_{n-2}$ , gegeben durch  $(\tilde{A}_0 : \dots : \tilde{A}_{n-2})$  mit  $\tilde{A}_i$  das Bild von  $A_i$  im homogenen Koordinatenring von  $C$ , ist eine birationale Transformation auf eine rationale Normkurve  $C_{n-2} \subset \mathbb{P}_L^{n-2}$ . Erzeuger von  $I(C_{n-2})$  mit Koeffizienten in  $K$  erhält man gemäß Abschnitt 12: Dazu berechnet man  $\ker(\alpha)$  mit  $\alpha : K[Y_0, \dots, Y_{n-2}] \rightarrow K[X_0, X_1, X_2] / \langle F \rangle$ ,  $\alpha(Y_i) = \tilde{A}_i$ .

1. Sei  $n = 2$ :

In Abschnitt 15 ist ein Verfahren angegeben mit dem man eine Parametrisierung  $\varphi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$  der Konik  $C$  (mit Koeffizienten in  $K$  oder einer algebraischen Körpererweiterung vom Grad 2 von  $K$ ) berechnen kann.

2. Sei  $n = 3$ :

In diesem Fall ist  $C_{n-2} = \mathbb{P}_L^1$  und man erhält eine Parametrisierung  $\Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $K$  gemäß Abschnitt 12.

3. Sei  $n \geq 5$  ungerade:

Gemäß Abschnitt 16 erhält man eine Folge von birationalen Transformationen  $C_{n-2} \xrightarrow{\Phi_{n-2}} C_{n-4} \rightarrow \dots \xrightarrow{\Phi_3} \mathbb{P}_L^1$  und rationalen Normkurven  $C_j \subset \mathbb{P}_L^j$ . Komposition liefert eine birationale Transformation  $\Psi' : C \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ ,  $\Psi' = \Phi_3 \circ \dots \circ \Phi_{n-2} \circ \Phi$  repräsentiert durch  $(\Psi'_0 : \Psi'_1)$ ,  $\Psi'_0, \Psi'_1 \in L[C]$  mit Koeffizienten in  $K$  und damit eine Parametrisierung  $\Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $K$  gemäß Abschnitt 12.

4. Sei  $n \geq 4$  gerade:

Gemäß Abschnitt 16 erhält man eine Folge von birationalen Transformationen  $C_{n-2} \xrightarrow{\Phi_{n-2}} C_{n-4} \rightarrow \dots \xrightarrow{\Phi_4} C_2$  und rationalen Normkurven  $C_j \subset \mathbb{P}_L^j$ . Komposition liefert eine birationale Transformation  $\Psi' : C \rightarrow C_2$ ,  $\Psi' = \Phi_4 \circ \dots \circ \Phi_{n-2} \circ \Phi$  gegeben durch  $(\Psi'_0 : \Psi'_1 : \Psi'_2)$ ,  $\Psi'_0, \Psi'_1, \Psi'_2 \in L[C]$  mit Koeffizienten in  $K$  und damit eine birationale Transformation  $\Psi'' : C_2 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $K$  gemäß Abschnitt 12.

Man muß schließlich noch eine Parametrisierung  $\varphi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C_2$  der Konik  $C_2$  (mit Koeffizienten in  $K$  oder einer algebraischen Körpererweiterung vom Grad 2 von  $K$ ) gemäß Abschnitt 15 berechnen. Damit erhält man eine Parametrisierung  $\Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$ ,  $\Psi = \Psi'' \circ \varphi$  von  $C$ , die Koeffizienten in  $K$ , bzw. in der algebraischen Körpererweiterung vom Grad 2 von  $K$  hat.

### 19.3 Bestimmung einer Parametrisierung aus einer Parametrisierung einer birational äquivalenten rationalen Normkurve

Sei  $n \geq 4$ . Sei  $\mathfrak{G}_{n-2} =_L \langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle$ ,  $A_i \in K[X_0, X_1, X_2]$ .  $\Phi : C \rightarrow C_{n-2}$ , gegeben durch  $(\tilde{A}_0 : \dots : \tilde{A}_{n-2})$  mit  $\tilde{A}_i$  das Bild von  $A_i$  im homogenen Koordinatenring  $L[C]$ , ist eine birationale Transformation auf eine rationale Normkurve  $C_{n-2} \subset \mathbb{P}_L^{n-2}$ . Man hat  $I(C_{n-2}) = \text{Ker}(\alpha)$  mit  $\alpha : L[Y_0, \dots, Y_{n-2}] \rightarrow L[X_0, X_1, X_2] / \langle F \rangle$ ,  $\alpha(Y_i) = \tilde{A}_i$ , wobei man Erzeuger von  $I(C_{n-2})$  in  $K[Y_0, \dots, Y_{n-2}]$  angeben kann, da  $A_0, \dots, A_{n-2}, F \in K[X_0, X_1, X_2]$  sind. Sei  $R := K[X_0, X_1, X_2]$  und  $R' := K[Y_0, \dots, Y_{n-2}]$ .

Nach Abschnitt 11.3 hat man eine minimale graduierte freie Auflösung von  $_R \langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle$  der Form

$$0 \rightarrow R(-(n-1))^{n-2} \xrightarrow{d_1} R(-(n-2))^{n-1} \xrightarrow{d_0} R \langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle \rightarrow 0$$

mit  $d_1 \in R_{n-1, n-2}$  mit linearen Einträgen und  $d_0 = (A_0, \dots, A_{n-2})$ . Sei

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n-3} \end{pmatrix} = d_1^T \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_{n-2} \end{pmatrix}$$

Schreibe  $g_0 = 0, \dots, g_{n-3} = 0$  als

$$M \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einem  $M \in R'_{n-2, 3}$  mit linearen Einträgen.

1. Sei  $n \geq 5$  ungerade:

Gemäß Abschnitt 16 erhält man einen birationalen Morphismus  $\tau : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C_{n-2}$  gegeben durch  $(\tau_0 : \dots : \tau_{n-2})$  mit  $\tau_i \in K[T_0, T_1]$ .

Sei  $M = ((M_{i,j}))_{i=0,\dots,n-3,j=0,1,2}$  also  $M_{i,j} \in R' = K[Y_0, \dots, Y_{n-2}]$  mit  $\deg(M_{i,j}) = 1$  und sei  $M' := ((M'_{i,j}))_{i=0,\dots,n-3,j=0,1,2}$  mit  $M'_{i,j} := M_{i,j}(\tau_0, \dots, \tau_{n-2}) \in$

$K[T_0, T_1]$ . Ist  $\ker(M') = \text{image} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$  dann ist  $(\Psi_0 : \Psi_1 : \Psi_2) : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow$

$C$  eine Parametrisierung von  $C$ . Waren die Gleichungen  $g_0 = 0, \dots, g_{n-3} = 0$  nicht ausreichend dafür, daß  $\ker(M')$  von einem einzigen Vektor erzeugt wird, sondern muß  $\ker(M')$  von mehreren Vektoren erzeugt werden, dann greife auf das Verfahren aus Abschnitt 19.2 zurück.

Bemerkung: Es gibt Spezialfälle, bei denen die Gleichungen  $g_0 = 0, \dots, g_{n-3} = 0$  nicht ausreichen, z.B. Kurven die nur eine einzige Singularität haben.

2. Sei  $n \geq 4$  gerade:

Hat man einen birationalen Morphismus  $\tau : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C_{n-2}$ , dann kann man verfahren wie in (1.) für  $n$  ungerade.

Ist gemäß Abschnitt 16 eine birationale Transformation  $\tau'' : C_2 \rightarrow C_{n-2}$  gegeben und die Konik  $C_2$  noch nicht parametrisiert, dann geht man wie folgt vor:

Sei  $\tau''$  gegeben durch  $(\tau''_0 : \dots : \tau''_{n-2})$  mit  $\tau''_i \in L[C_2]$  mit Repräsentanten mit Koeffizienten in  $K$  und sei  $I(C_2) = \langle H \rangle$  mit einem  $H \in K[T_0, T_1, T_2]$ ,  $\deg(H) = 2$ .

Sei  $M = ((M_{i,j}))_{i=0,\dots,n-3,j=0,1,2}$  also  $M_{i,j} \in R' = K[Y_0, \dots, Y_{n-2}]$  mit  $\deg(M_{i,j}) = 1$  und sei  $M' := ((M'_{i,j}))_{i=0,\dots,n-3,j=0,1,2}$  mit  $M'_{i,j} := M_{i,j}(\tau''_0, \dots, \tau''_{n-2}) \in$

$L[C_2]$ . Sei  $\ker(M') = \text{image} \begin{pmatrix} \Psi_{0,0} & \dots & \Psi_{s,0} \\ \Psi_{0,1} & \dots & \Psi_{s,1} \\ \Psi_{0,2} & \dots & \Psi_{s,2} \end{pmatrix}$ . Gilt  $\deg(\Psi_{i,j}) = \frac{n}{2}$  für

alle  $i, j$ , dann repräsentiert  $(\Psi_{i,0} : \Psi_{i,1} : \Psi_{i,2})$  für alle  $i$  dieselbe birationale Transformation  $C_2 \rightarrow C$ . Anderenfalls greife auf das Verfahren aus Abschnitt 19.2 zurück.

Insgesamt:

**Algorithmus 120** Folgender Algorithmus berechnet eine Parametrisierung der ebenen rationalen Kurve  $C$  vom Grad  $n \geq 4$  über  $\mathbb{P}_L^1$  für  $n$  ungerade oder einer Konik  $C_2 = V(H) \subset \mathbb{P}_L^2$ ,  $H \in K[T_0, T_1, T_2]$  für  $n$  gerade:

1. Berechne eine Basis  $A_0, \dots, A_{n-2} \in K[X_0, X_1, X_2]$  von  $\mathfrak{G}_{n-2}$ .
2. Berechne eine minimale graduierte freie Auflösung

$$0 \rightarrow R(-(n-1))^{n-2} \xrightarrow{d_1} R(-(n-2))^{n-1} \xrightarrow{d_0} \langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle \rightarrow 0$$

von  $\langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle$ .

3. Schreibe  $M \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} := d_1^T \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_{n-2} \end{pmatrix}$

4. Mit  $\tilde{A}_i$  das Bild von  $A_i$  in  $K[X_0, X_1, X_2] / \langle F \rangle$  und  $\alpha : K[Y_0, \dots, Y_{n-2}] \rightarrow K[X_0, X_1, X_2] / \langle F \rangle$ ,  $\alpha(Y_i) := \tilde{A}_i$  berechne  $I_{n-2} := \ker(\alpha)$ .

5. Berechne mit dem Algorithmus 119:

(a) Für  $n$  ungerade:

Eine Parametrisierung  $\tau : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C_{n-2}$  von  $C_{n-2}$  gegeben durch  $(\tau_0 : \dots : \tau_{n-2})$  mit  $\tau_i \in K[T_0, T_1]$ .

(b) Für  $n$  gerade:

Eine Parametrisierung  $\tau : C_2 \rightarrow C_{n-2}$  von  $C_{n-2}$  über einer Konik  $C_2 = V(H) \subset \mathbb{P}_L^2$ ,  $H \in K[T_0, T_1, T_2]$ ,  $\tau$  gegeben durch  $(\tau_0 : \dots : \tau_{n-2})$  mit  $\tau_i \in L[C_2]$  mit Repräsentanten mit Koeffizienten in  $K$ .

6.  $M'_{i,j} := M_{i,j}(\tau_0, \dots, \tau_{n-2})$

(a) Ist  $n$  ungerade:

Ist  $\ker(M') = \text{image} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$  mit  $\deg(\Psi_i) = n$ ,

dann ist  $(\Psi_0 : \Psi_1 : \Psi_2) : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$  eine Parametrisierung von  $C$ .

Sonst verwende das Verfahren aus Abschnitt 19.2.

(b) Ist  $n$  gerade:

Ist  $\ker(M') = \text{image} \begin{pmatrix} \Psi_{0,0} & \dots & \Psi_{s,0} \\ \Psi_{0,1} & \dots & \Psi_{s,1} \\ \Psi_{0,2} & \dots & \Psi_{s,2} \end{pmatrix}$  mit  $\deg(\Psi_{i,j}) = \frac{n}{2}$ ,

dann repräsentiert jedes  $(\Psi_{i,0} : \Psi_{i,1} : \Psi_{i,2})$  für alle  $i$  dieselbe Parametrisierung  $C_2 \rightarrow C$ .

Sonst verwende das Verfahren aus Abschnitt 19.2.

## 20 Sukzessive Reduktion des Grads mit einem

$g_{n-2}^2$

Das folgende Verfahren ist der klassische Algorithmus zur rationalen Parametrisierung von ebenen rationalen Kurven und wurde in [20] angegeben. Praktisch ist dieses Verfahren nicht anzuwenden, da  $O(n)$ -mal das adjungierte Ideal einer ebenen Kurve bestimmt werden muß.

Wie im letzten Abschnitt wird  $\mathfrak{G}$  für  $C$  berechnet. Sei  $n \geq 4$ . Die Fälle  $n = 2, 3$  sind wie im Abschnitt 19 behandelt.

Sei  $\mathfrak{G}_{n-2} =_L \langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle$ .  $\Phi : C \rightarrow C_{n-2}$  gegeben durch  $(\tilde{A}_0 : \dots : \tilde{A}_{n-2})$  mit  $\tilde{A}_i$  das Bild von  $A_i$  in  $L[C]$ , ist eine birationale Transformation auf eine rationale Normkurve  $C_{n-2} \subset \mathbb{P}_L^{n-2}$ . Man hat  $I(C_{n-2}) = \text{Ker}(\alpha)$  mit  $\alpha : L[Y_0, \dots, Y_{n-2}] \rightarrow L[X_0, X_1, X_2] / \langle F \rangle$ ,  $\alpha(Y_i) = \tilde{A}_i$ , wobei man Erzeuger von  $I(C_{n-2})$  in  $K[Y_0, \dots, Y_{n-2}]$  angeben kann, da  $A_0, \dots, A_{n-2}, F \in K[X_0, X_1, X_2]$  sind.

$C_{n-2} \subset \mathbb{P}_L^{n-2}$  kann birational in den  $\mathbb{P}_L^2$  projiziert werden mit einer birationalen Transformation  $\pi : C_{n-2} \rightarrow D_{n-2} \subset \mathbb{P}_L^2$ , wobei  $D_{n-2}$  eine Gleichung in  $K[X_0, X_1, X_2]$  hat. Damit bekommt man eine birationale Transformation  $\chi_n : C \rightarrow D_{n-2}$ , die einem  $g_{n-2}^2$  entspricht.

Wiederhole nun diesen Prozess mit  $D_{n-2}$  statt  $C$ . Dazu muß für  $D_{n-2}$  das adjungierte Ideal berechnet werden. Iterativ erhält man eine Folge von birationalen Transformationen  $C \rightarrow D_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ ,  $D_j \subset \mathbb{P}_L^2$ , für  $n$  ungerade oder  $C \rightarrow D_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow D_2$  mit einer Konik  $D_2$  für  $n$  gerade. Abschnitt 12 liefert einen birationalen Morphismus  $\Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$  falls  $n$  ungerade ist und  $\Psi'' : D_2 \rightarrow C$  falls  $n$  gerade ist. Ist  $n$  gerade, dann muß schließlich noch eine Parametrisierung  $\varphi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow D_2$  der Konik  $D_2$  (mit Koeffizienten in  $K$  oder einer algebraischen Körpererweiterung vom Grad 2 von  $K$ ) gemäß Abschnitt 15 berechnet werden. Damit erhält man eine Parametrisierung  $\Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$ ,  $\Psi = \Psi'' \circ \varphi$  von  $C$ , die Koeffizienten in  $K$ , bzw. in der algebraischen Körpererweiterung vom Grad 2 von  $K$  hat.

## 21 Direkte Berechnung eines $g_2^2$ bzw. eines $g_1^1$

Die Fälle  $n = 2, 3$  werden wie im Abschnitt 19 behandelt.

1. Sei  $n$  ungerade:

Gemäß Abschnitt 13.3 erhält man einen  $g_1^1$ , der einer birationalen Transformation  $\Psi' : C \rightarrow \mathbb{P}_L^1$  mit Koeffizienten in  $K$  entspricht, deren Umkehrung gemäß Abschnitt 12 eine Parametrisierung  $\Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$  mit Koeffizienten in  $K$  liefert.

2. Sei  $n$  gerade:

Gemäß Abschnitt 13.2 erhält man einen  $g_2^2$ , der einer birationalen Transformation  $\Psi' : C \rightarrow C_2$  auf eine Konik  $C_2 \subset \mathbb{P}_L^2$  mit Koeffizienten in  $K$  entspricht (eventuell erhält man sogar einen  $g_1^1$ ). Abschnitt 12 liefert einen birationalen Morphismus  $\Psi'' : C_2 \rightarrow C$ . Es muß schließlich noch eine Parametrisierung  $\varphi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C_2$  der Konik  $C_2$  (mit Koeffizienten in  $K$  oder einer algebraischen Körpererweiterung vom Grad 2 von  $K$ ) gemäß Abschnitt 15 berechnet werden. Damit erhält man eine Parametrisierung  $\Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$ ,  $\Psi = \Psi'' \circ \varphi$  von  $C$ , die Koeffizienten in  $K$ , bzw. in der algebraischen Körpererweiterung vom Grad 2 von  $K$  hat.

## Teil IV

# Beispielrechnungen und Vergleich der Parametrisierungsverfahren

## 22 Erzeugung von rationalen Kurven mit vorgegebenen Singularitäten

### 22.1 Vorbemerkungen

Sei  $R := \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ . Vorgegeben seien Familien von Punkten  $\{P_{i,1}, \dots, P_{i,s_i}\}$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $P_{i,j} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  durch Radikalideale  $I_i \subset \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$  mit  $V(I_i) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s_i}\}$ . Seien alle  $P_{i,j}$  paarweise verschieden.

Ordne nun jeder Familie  $\{P_{i,1}, \dots, P_{i,s_i}\}$  eine Multiplizität  $r_i \in \mathbb{N}$ ,  $r_i \geq 2$  zu, sodaß es ein  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  gibt mit

$$\sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

(d.h. eine irreduzible Kurve, die in  $P_{i,j}$  einen gewöhnlichen Mehrfachpunkt der Multiplizität  $r_i$  hat  $\forall i, j$ , ist rational) und außerdem

$$3n > \sum_{i=1}^l s_i r_i$$

(d.h. die gesuchte Kurve soll nicht zu viele Singularitäten niedriger Multiplizität haben. Man beachte: es gibt durchaus rationale Kurven vom Grad  $n$  mit genau  $s_i$  Punkten der Multiplizität  $r_i$  und  $3n \leq \sum_{i=1}^l s_i r_i$ , z.B. rationale Kurven vom Grad  $n \geq 6$  mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten). Sei  $I := \bigcap_{i=1}^l \overline{(I_i^{r_i})}$ , wobei der Querstrich die Saturierung in  $\langle X_0, X_1, X_2 \rangle$  bedeutet. Setze weiter voraus, daß

$$H(r, R/I) = \min \left\{ \frac{(r+2)(r+1)}{2}, \sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i+1)}{2} \right\} \quad (17)$$

(analog zur Definition von generischer  $s$ -Position). Damit gibt es ein  $m \leq n$  mit

$$H(r, R/I) = \begin{cases} \frac{(r+2)(r+1)}{2} & \text{für } r < m \\ \sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i+1)}{2} & \text{für } r \geq m \end{cases}$$

denn wegen  $3n > \sum_{i=1}^l s_i r_i$  ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i+1)}{2} &= \sum_{i=1}^l s_i r_i + \sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i-1)}{2} < \\ &< 3n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \dim(I_n) &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i+1)}{2} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{i=1}^l s_i r_i = \\ &= 3n - \sum_{i=1}^l s_i r_i > 0 \end{aligned}$$

und  $I = \langle I_m, I_{m+1} \rangle$ .

Ohne Beweis: Unter diesen Voraussetzungen ist ein generisches Element von  $I_n$  irreduzibel.

Bemerkung: Ist  $\sum_{i=1}^l s_i r_i \geq 2n-1$ , dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i+1)}{2} &= \sum_{i=1}^l s_i r_i + \sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i-1)}{2} \geq \\ &\geq 2n-1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

also  $m = n$ , und falls  $\sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ , ist  $I = \langle I_n \rangle$

Hat man ein irreduzibles  $F \in I_n$ , dann hat  $C := V(F)$  in jedem  $P_{i,j}$  einen Punkt der Multiplizität mindestens  $r_i$  und wegen  $\sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  hat  $C$  genau die gewöhnlichen Mehrfachpunkte  $P_{i,j}$  der Multiplizität  $r_i$  und damit ist  $p(C) = 0$ .

Für das adjungierte Ideal von  $C$  gilt also  $\mathfrak{O} = \mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^l \overline{(I_i^{r_i-1})}$ .

## 22.2 Beispiele

Praktisch gibt man Ideale  $I_i \subset \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$ ,  $i = 1, \dots, l$  von Familien  $\{P_{i,1}, \dots, P_{i,s_i}\}$  in generischer  $s_i$ -Position vor, sodaß es ein  $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$  und  $r_i \geq 2$  gibt mit

$$\sum_{i=1}^l s_i \frac{r_i(r_i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \text{ und}$$

$$3n > \sum_{i=1}^l s_i r_i$$

und testet Gleichung (17). Dann wählt man ein generisches Element  $F \in I_n$  wobei  $I = \bigcap_{i=1}^l \overline{(I_i^{r_i})}$  und testet ob  $C = V(F)$  irreduzibel ist.

Das Ideal  $I \subset \mathbb{Q}[X_0, X_1, X_2]$  einer Familie von  $\frac{(h-1)(h-2)}{2}$  Punkten in generischer  $\frac{(h-1)(h-2)}{2}$ -Position erhält man z.B. wenn man das adjungierte Ideal einer rationalen Kurve berechnet, die nur gewöhnliche Doppelpunkte und eine Gleichung mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  hat. Man beachte jedoch, daß dies nicht die einzigen Familien von  $s$  Punkten in generischer  $s$ -Position sind. Das Ideal

$$\langle v^2 - 55/84 * u * z - 5/14 * v * z + 1/84 * z^2, u * v - 89/84 * u * z - 3/14 * v * z + 23/84 * z^2 \rangle$$

ist ein Ideal von 4 Punkten in generischer 4-Position, jedoch gibt es kein  $h$  mit  $\frac{(h-1)(h-2)}{2} = 4$ .

Mit dem Verfahren kann man für  $m \geq 3$  eine rationale Kurve mit einem  $m$ -fach-Punkt und 3 Punkten der Multiplizität  $m - 1$  konstruieren:

Sei

$$I_1 := \text{ideal}(v, u)$$

$$I_2 :=$$

$$\text{ideal}(v^2 + 1/18 * u * z - 13/9 * v * z + 7/18 * z^2, u * v - 7/18 * u * z - 8/9 * v * z + 5/18 * z^2, u^2 - 23/18 * u * z + 11/9 * v * z - 17/18 * z^2)$$

also

$$P_{1,1} = (0:0:1)$$

$$P_{2,1} = (-1/3, 1/3, 1)$$

$$P_{2,2} = (1, 1, 1)$$

$$P_{2,3} = (3/2, 1/2, 1)$$

Beide Familien sind in generischer 1-Position bzw. 3-Position. Sei  $r_1 := m$ ,  $r_2 := m - 1$  und  $I(m) := I_1^m \cap I_2^{m-1}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 \frac{m(m-1)}{2} + 3 \frac{(m-1)(m-2)}{2} &= \frac{((2m-1)-1)((2m-1)-2)}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

mit  $n = 2m - 1$

Es gilt  $1m + 3(m - 1) = 4m - 3 = 2n - 1$  und  $1m + 3(m - 1) = 4m - 3 < 6m - 3 = 3n$ .

Für konkretes  $m$  beobachtet man, daß zufällige Elemente von  $(I(m))_n$  fast immer irreduzibel sind, Geschlecht 0 haben, und einen gewöhnlichen  $m$ -fach-Punkt in  $P_{1,1}$  und gewöhnliche  $(m - 1)$ -fach-Punkte in  $P_{2,1}, P_{2,2}, P_{2,3}$  haben, daß außerdem  $I(m) = \langle (I(m))_n \rangle$  und  $\dim((I(m))_n) = 3n - m - 3(m - 1) = 2m$ .

Die Beispiele Nummer (16) und (18) aus dem folgenden Abschnitt 23 sind auf diese Weise entstanden mit

Beispiel	$n$	$m$
16	7	4
17	11	6

## 23 Beispielkurven

Im folgenden werden die rationalen Kurven  $C = V(F)$ ,  $F \in \mathbb{Q}[u, v, z]$  betrachtet. Einige der Beispiele stammen aus [39] und von Mark van Hoeij. Die Notation entspricht der Syntax von Macaulay 2.

- $F = v^4 - 2u^3z + 3u^2z^2 - 2v^2z^2$
- $F = (v^2 - uz)^2 - u^3z$
- $F = v^5 + 2uv^2z^2 + 2uv^3z + u^2vz^2 - 4u^3vz + 2u^5$
- $F = 25u^8 + 184u^7v + 518u^6v^2 + 720u^5v^3 + 576u^4v^4 + 282u^3v^5 + 84u^2v^6 + 14uv^7 + v^8 + 244u^7z + 1326u^6vz + 2646u^5v^2z + 2706u^4v^3z + 1590u^3v^4z + 546u^2v^5z + 102uv^6z + 8v^7z + 854u^6z^2 + 3252u^5vz^2 + 4770u^4v^2z^2 + 3582u^3v^3z^2 + 1476u^2v^4z^2 + 318uv^5z^2 + 28v^6z^2 + 1338u^5z^3 + 3740u^4vz^3 + 4030u^3v^2z^3 + 2124u^2v^3z^3 + 550uv^4z^3 + 56v^5z^3 + 1101u^4z^4 + 2264u^3vz^4 + 1716u^2v^2z^4 + 570uv^3z^4 + 70v^4z^4 + 508u^3z^5 + 738u^2vz^5 + 354uv^2z^5 + 56v^3z^5 + 132u^2z^6 + 122uvz^6 + 28v^2z^6 + 18uz^7 + 8vz^7 + z^8$
- $F = u^6 + 3u^4v^2 + 3u^2v^4 + v^6 - 4u^4z^2 - 34u^3vz^2 - 7u^2v^2z^2 + 12uv^3z^2 + 6v^4z^2 + 36u^2z^4 + 36uvz^4 + 9v^2z^4$
- $F = v^9 + 4uv^7z + 4v^8z + 6u^2v^5z^2 + 12uv^6z^2 + 6v^7z^2 + 4u^3v^3z^3 + 12u^2v^4z^3 + 12uv^5z^3 + 3v^6z^3 + u^4vz^4 + 4u^3v^2z^4 + 6u^2v^3z^4 + 3uv^4z^4 - 2v^5z^4 + u^2v^2z^5 + uv^3z^5 - 2v^4z^5 + u^3z^6 + 3u^2vz^6 - uv^2z^6 - 6v^3z^6 - 2u^2z^7 - 5uvz^7 - 4v^2z^7 - vz^8$

7.  $F = 36*u^7+64*u^6*v+1440*u^5*v^2+216*u^4*v^3+120*u^3*v^4$   
 $+1728*u^2*v^5+243*u*v^6+36*v^7-96*u^6*z+108*u^5*v*z+16*u^4*v^2*z$   
 $+576*u^3*v^3*z+216*u^2*v^4*z-12*u*v^5*z+216*v^6*z+88*u^5*z^2$   
 $+3456*u^4*v*z^2+243*u^3*v^2*z^2+124*u^2*v^3*z^2+3816*u*v^4*z^2$   
 $+297*v^5*z^2+162*u^4*z^3-20*u^3*v*z^3+936*u^2*v^2*z^3$   
 $+342*u*v^3*z^3-96*v^4*z^3+1944*u^3*z^4+81*u^2*v*z^4$   
 $-32*u*v^2*z^4+1536*v^3*z^4$
8.  $F = u^5*v^5+21*u^5*v^4*z-36*u^4*v^5*z-19*u^5*v^3*z^2+12*u^4*v^4*z^2$   
 $+57*u^3*v^5*z^2+u^5*v^2*z^3+u^4*v^3*z^3-53*u^3*v^4*z^3$   
 $-19*u^2*v^5*z^3+u^5*v*z^4+43*u^3*v^3*z^4+u*v^5*z^4+u^5*z^5$   
 $-15*u^3*v^2*z^5+u^2*v^3*z^5+u*v^4*z^5+v^5*z^5$
9.  $F = u^4-14*u^2*v^2+v^4+8*u^2*v*z+8*v^3*z$
10.  $F = 14440*u^5-16227*u^4*v+10812*u^3*v^2-13533*u^2*v^3+3610*u*v^4$   
 $+1805*v^5+14440*u^4*z-18032*u^3*v*z+16218*u^2*v^2*z-12626*u*v^3*z$   
 $+3610*v^4*z+3610*u^3*z^2-4508*u^2*v*z^2+5406*u*v^2*z^2-2703*v^3*z^2$
11.  $F = -24135/322*u^6-532037/6440*u^5*v+139459/560*u^4*v^2$   
 $-1464887/12880*u^3*v^3+72187/25760*u^2*v^4+9/8*u*v^5$   
 $+1/8*v^6-403511/3220*u^5*z-40817/920*u^4*v*z+10059/80$   
 $*u^3*v^2*z-35445/1288*u^2*v^3*z+19/4*u*v^4*z+3/4*v^5*z$   
 $-20743/805*u^4*z^2+126379/3220*u^3*v*z^2-423417/6440$   
 $*u^2*v^2*z^2+11/2*u*v^3*z^2+3/2*v^4*z^2+3443/140*u^3*z^3$   
 $+u^2*v*z^3+u*v^2*z^3+v^3*z^3$
12.  $F = u^9+u^7*v^2-u^6*v^3-6*u^5*v^4+3*u^4*v^5+4*u^3*v^6-3*u^2*v^7$   
 $-u*v^8+v^9+4*u^8*z-u^7*v*z+5*u^6*v^2*z+9*u^5*v^3*z-21*u^4*v^4*z$   
 $-6*u^3*v^5*z+16*u^2*v^6*z+u*v^7*z-5*v^8*z+6*u^7*z^2-4*u^6*v*z^2$   
 $+3*u^5*v^2*z^2+30*u^4*v^3*z^2-12*u^3*v^4*z^2-27*u^2*v^5*z^2$   
 $+6*u*v^6*z^2+10*v^7*z^2+4*u^6*z^3-6*u^5*v*z^3-8*u^4*v^2*z^3$   
 $+25*u^3*v^3*z^3+15*u^2*v^4*z^3-14*u*v^5*z^3-10*v^6*z^3+u^5*z^4$   
 $-4*u^4*v*z^4-10*u^3*v^2*z^4+2*u^2*v^3*z^4+11*u*v^4*z^4+5*v^5*z^4$   
 $-u^3*v*z^5-3*u^2*v^2*z^5-3*u*v^3*z^5-v^4*z^5$
13.  $F = 1251*v^4*z^3+5184*u*v^3*z^3+5354*u^2*v^2*z^3+115*u^4*z^3$   
 $-9552*u*v^4*z^2-22496*u^2*v^3*z^2-5424*u^3*v^2*z^2$   
 $-160*u^4*v*z^2+22080*u^2*v^4*z+17472*u^3*v^3*z$   
 $-13824*u^3*v^4$

14.  $F = -2*u*v^4*z^4 + u^4*v^5 + 12*u^4*v^3*z^2 + 12*u^2*v^4*z^3 - u^3*v*z^5$   
 $+ 11*u^3*v^2*z^4 - 21*u^3*v^3*z^3 - 4*u^4*v*z^4 + 2*u^4*v^2*z^3$   
 $- 6*u^4*v^4*z + u^5*z^4 - 3*u^5*v^2*z^2 + u^5*v^3*z - 3*u*v^5*z^3 - 2*u^2*v^3*z^4$   
 $+ u^3*v^4*z^2 + v^5*z^4$
15.  $u^{10} + 6*u^9*v - 30*u^7*v^3 - 15*u^6*v^4 + u^5*v^5 + u^4*v^6 + 6*u^3*v^7$   
 $+ u^2*v^8 + 7*u*v^9 + v^{10} + 5*u^9*z + 24*u^8*v*z - 30*u^7*v^2*z - 120*u^6*v^3*z$   
 $- 43*u^5*v^4*z + 5*u^4*v^5*z + 20*u^3*v^6*z + 10*u^2*v^7*z + 29*u*v^8*z$   
 $+ 5*v^9*z + 10*u^8*z^2 + 36*u^7*v*z^2 - 105*u^6*v^2*z^2 - 179*u^5*v^3*z^2$   
 $- 38*u^4*v^4*z^2 + 25*u^3*v^5*z^2 + 25*u^2*v^6*z^2 + 46*u*v^7*z^2 + 10*v^8*z^2$   
 $+ 10*u^7*z^3 + 24*u^6*v*z^3 - 135*u^5*v^2*z^3 - 117*u^4*v^3*z^3 - u^3*v^4*z^3$   
 $+ 25*u^2*v^5*z^3 + 34*u*v^6*z^3 + 10*v^7*z^3 + 5*u^6*z^4 + 6*u^5*v*z^4$   
 $- 75*u^4*v^2*z^4 - 27*u^3*v^3*z^4 + 10*u^2*v^4*z^4 + 11*u*v^5*z^4 + 5*v^6*z^4$   
 $+ u^5*z^5 - 15*u^3*v^2*z^5 + u^2*v^3*z^5 + u*v^4*z^5 + v^5*z^5$
16.  $F = 2*u^7 + u^6*v + 3*u^5*v^2 + u^4*v^3 + 2*u^3*v^4 + u^2*v^5 + 2*u*v^6 + v^7$   
 $- 7780247/995328*u^6*z - 78641/9216*u^5*v*z - 10892131/995328*u^4*v^2*z$   
 $- 329821/31104*u^3*v^3*z - 953807/331776*u^2*v^4*z - 712429/248832*u*v^5*z$   
 $+ 1537741/331776*v^6*z + 2340431/248832*u^5*z^2 + 5154337/248832*u^4*v*z^2$   
 $+ 658981/41472*u^3*v^2*z^2 + 1737757/124416*u^2*v^3*z^2$   
 $- 1234733/248832*u*v^4*z^2 - 1328329/82944*v^5*z^2 - 818747/248832*u^4*z^3$   
 $- 1822879/124416*u^3*v*z^3 - 415337/31104*u^2*v^2*z^3$   
 $+ 1002655/124416*u*v^3*z^3 + 849025/82944*v^4*z^3$
17.  $F = u^{11} + 3*u^{10}*v + 2*u^9*v^2 + u^8*v^3 + 2*u^7*v^4 + u^6*v^5 + 3*u^5*v^6 + u^4*v^7$   
 $+ 2*u^3*v^8 + u^2*v^9 + 2*u*v^{10} + v^{11} - 37646523511/5159780352*u^{10}*z$   
 $- 12735172937/644972544*u^9*v*z - 92722810205/5159780352*u^8*v^2*z$   
 $- 6771611725/322486272*u^7*v^3*z - 79705721155/2579890176*u^6*v^4*z$   
 $- 5691795857/161243136*u^5*v^5*z - 52315373005/2579890176*u^4*v^6*z$   
 $+ 2598387077/322486272*u^3*v^7*z + 157674139405/5159780352*u^2*v^8*z$   
 $+ 9450269981/644972544*u*v^9*z - 1350789043/1719926784*v^{10}*z$   
 $+ 12849479611/644972544*u^9*z^2 + 3879535279/71663616*u^8*v*z^2$   
 $+ 11488988309/161243136*u^7*v^2*z^2 + 16022496731/161243136*u^6*v^3*z^2$   
 $+ 14783031067/107495424*u^5*v^4*z^2 + 34074776537/322486272*u^4*v^5*z^2$   
 $- 2606453339/161243136*u^3*v^6*z^2 - 7551362827/53747712*u^2*v^7*z^2$   
 $- 71147279173/644972544*u*v^8*z^2 - 4491673835/214990848*v^9*z^2$   
 $- 5255202913/214990848*u^8*z^3 - 8675467489/107495424*u^7*v*z^3$   
 $- 1706519429/11943936*u^6*v^2*z^3 - 22409190037/107495424*u^5*v^3*z^3$   
 $- 11738664739/53747712*u^4*v^4*z^3 - 1469700833/35831808*u^3*v^5*z^3$   
 $+ 23678835685/107495424*u^2*v^6*z^3 + 24664591385/107495424*u*v^7*z^3$

$$\begin{aligned}
&+4743235967/71663616*v^8*z^3+1955990257/161243136*u^7*z^4 \\
&+10614149851/161243136*u^6*v*z^4+23866276253/161243136*u^5*v^2*z^4 \\
&+10551670493/53747712*u^4*v^3*z^4+14951486563/161243136*u^3*v^4*z^4 \\
&-22801627471/161243136*u^2*v^5*z^4-32691689713/161243136*u*v^6*z^4 \\
&-3808427873/53747712*v^7*z^4-362334499/322486272*u^6*z^5 \\
&-596548295/26873856*u^5*v*z^5-21950924039/322486272*u^4*v^2*z^5 \\
&-1124117785/20155392*u^3*v^3*z^5+1234417927/35831808*u^2*v^4*z^5 \\
&+5479236793/80621568*u*v^5*z^5+2660429561/107495424*v^6*z^5
\end{aligned}$$

## 24 Berechnung des adjungierten Ideals

### 24.1 Berechnung des adjungierten Ideals mit Saturierung

Bei jedem Beispiel ist eine Liste angegeben der Form:

$$\{\dots, \{\text{Ideal der 3-fach-Punkte}, 3\}, \{\text{Ideal der 2-fach-Punkte}, 2\}\}$$

und eine Matrix, die Erzeuger des adjungierten Ideals enthält:

- 1  $\{\{\text{ideal}(u^2-u*z, u*v-v*z, v^2-u*z), 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{v^2-u*z, u*v-v*z, u^2-u*z\}\}$
- 3  $\{\{\text{ideal}(v, u), 3\},$   
 $\{\text{ideal}(v^2+u*z, u*v+z^2, u^2-v*z), 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{v^3+u*v*z, u*v^2+u^2*z, u^2*v-v^2*z, u^3-u*v*z\}\}$
- 7  $\{\{\text{ideal}(v^2+u*z, u^2-v*z), 3\},$   
 $\{\text{ideal}(v^2-u*z, u*v+2*z^2, u^2+2*v*z), 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{v^5+8/9*u^4*z+2*u*v^3*z-7/9*u^2*v*z^2+8/9*v^2*z^3,$   
 $u*v^4+2/3*u^2*v^2*z-1/3*u^3*z^2+4/3*v^3*z^2+4/3*u*v*z^3,$   
 $u^2*v^3+u^3*v*z+1/2*v^4*z+2*u*v^2*z^2+3/2*u^2*z^3,$   
 $u^3*v^2-1/3*u^4*z-u*v^3*z+5/3*u^2*v*z^2-4/3*v^2*z^3,$   
 $u^4*v-1/2*u^2*v^2*z+3/2*u^3*z^2-1/2*v^3*z^2-3/2*u*v*z^3,$   
 $u^5-2*u^3*v*z-9/4*v^4*z-7/2*u*v^2*z^2-9/4*u^2*z^3\}\}$
- 8  $\{\{\text{ideal}(v*z, u*z, u*v), 5\}, \{\text{ideal}(v-z, u-z), 4\},$   
 $\{\text{ideal } 1, 3\}, \{\text{ideal } 1, 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{u^3*v*z^4-3*u^2*v^2*z^4+3*u*v^3*z^4-v^4*z^4,$   
 $u^4*z^4-6*u^2*v^2*z^4+8*u*v^3*z^4-3*v^4*z^4,$   
 $u^3*v^2*z^3-2*u^2*v^3*z^3+u*v^4*z^3-u^2*v^2*z^4+2*u*v^3*z^4-v^4*z^4,$   
 $u^4*v*z^3-3*u^2*v^3*z^3+2*u*v^4*z^3-3*u^2*v^2*z^4+6*u*v^3*z^4$   
 $-3*v^4*z^4,$   
 $u^3*v^3*z^2-u^2*v^4*z^2-2*u^2*v^3*z^3+2*u*v^4*z^3+u*v^3*z^4-v^4*z^4,$

$$\begin{aligned}
&u^4v^2z^2-u^2v^4z^2-4u^2v^3z^3+4uv^4z^3-u^2v^2z^4 \\
&+4uv^3z^4-3v^4z^4, \\
&u^3v^4z-3u^2v^4z^2+3uv^4z^3-v^4z^4, \\
&u^4v^3z-3u^2v^4z^2-3u^2v^3z^3+6uv^4z^3+2uv^3z^4 \\
&-3v^4z^4, \\
&u^4v^4-6u^2v^4z^2+8uv^4z^3-3v^4z^4\}
\end{aligned}$$

**9**  $\{\{\text{ideal}(v,u), 3\}, \{\text{ideal } 1, 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{v^2, uv, u^2\}\}$

**10**  $\{\{\text{ideal}(v,u), 3\}, \{\text{ideal}(v^2-uz-1/3vz-1/3z^2,$   
 $uv-uz+1/3vz-2/3z^2, u^2-1/3vz-1/3z^2), 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{v^3-1/3u^2z-2/3uvz-2/3v^2z, uv^2-2/3u^2z$   
 $-1/3uvz-1/3v^2z, u^2v-1/3u^2z+1/3uvz-2/3v^2z,$   
 $u^3+1/3u^2z-1/3uvz-1/3v^2z\}\}$

**11**  $\{\{\text{ideal}(u,v^2+2vz), 3\}, \{\text{ideal}(uv-113/146v^2+14/73uz$   
 $+26/73vz+14/73z^2, u^2-69/146v^2+57/73uz+12/73vz$   
 $-16/73z^2), 2\}\}$   
 $\text{matrix}\{\{v^4-1632/161u^3z+816/161u^2vz-1084/161uv^2z$   
 $+4v^3z-1632/161u^2z^2-2168/161uvz^2+4v^2z^2,$   
 $uv^3-384/161u^3z+192/161u^2vz+48/161uv^2z-384/161u^2z^2$   
 $-548/161uvz^2,$   
 $u^2v^2-120/161u^3z+382/161u^2vz-146/161uv^2z$   
 $-120/161u^2z^2-292/161uvz^2,$   
 $u^3v-62/161u^3z+353/161u^2vz-113/161uv^2z-62/161u^2z^2$   
 $-226/161uvz^2,$   
 $u^4+3/7u^3z+9/7u^2vz-3/7uv^2z-4/7u^2z^2-6/7uvz^2\}\}$

**12**  $\{\{\text{ideal}(v-z,u), 5\}, \{\text{ideal}(v^2-vz, uv+vz, u^2+uz), 4\},$   
 $\{\text{ideal } 1, 3\}, \{\text{ideal } 1, 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{v^7-4v^6z+6v^5z^2-4v^4z^3+v^3z^4,$   
 $uv^6-3uv^5z+3uv^4z^2-uv^3z^3,$   
 $u^2v^5-3u^2v^4z+uv^5z+3u^2v^3z^2-3uv^4z^2-u^2v^2z^3$   
 $+3uv^3z^3-uv^2z^4,$   
 $u^3v^4-2u^3v^3z+u^2v^4z+u^3v^2z^2-2u^2v^3z^2+u^2v^2z^3,$   
 $u^4v^3-2u^4v^2z+2u^3v^3z+u^4vz^2-4u^3v^2z^2+u^2v^3z^2$   
 $+2u^3vz^3-2u^2v^2z^3+u^2vz^4,$   
 $u^5v^2-u^5vz+2u^4v^2z-2u^4vz^2+u^3v^2z^2-u^3vz^3,$   
 $u^6v-u^6z+3u^5vz-3u^5z^2+3u^4vz^2-3u^4z^3+u^3vz^3-u^3z^4,$   
 $u^7+3u^6z+3u^5z^2+u^4z^3\}\}$

- 13  $\{\{\text{ideal}(v,u), 4\}, \{\text{ideal}(z,u*v), 3\},$   
 $\text{ideal}(v^2+1/18*u*z-13/9*v*z +7/18*z^2, u*v-7/18*u*z-8/9*v*z+5/18*z^2,$   
 $u^2-23/18*u*z+11/9*v*z-17/18*z^2), 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{u^3*z^2-3*u^2*v*z^2-u*v^2*z^2+3*v^3*z^2,$   
 $u*v^3*z+5/48*u^2*v*z^2-2/3*u*v^2*z^2-7/16*v^3*z^2,$   
 $u^2*v^2*z-17/48*u^2*v*z^2-1/3*u*v^2*z^2-5/16*v^3*z^2,$   
 $u^3*v*z-67/48*u^2*v*z^2-2/3*u*v^2*z^2+17/16*v^3*z^2,$   
 $u^2*v^3-13/288*u^2*v*z^2-4/9*u*v^2*z^2-49/96*v^3*z^2,$   
 $u^3*v^2-167/288*u^2*v*z^2-5/9*u*v^2*z^2+13/96*v^3*z^2\}\}$
- 14  $\{\{\text{ideal}(v-z,u-z), 5\}, \{\text{ideal}(v*z,u*z,u*v), 4\},$   
 $\{\text{ideal } 1, 3\}, \{\text{ideal } 1, 2\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{u^3*v*z^3-3*u^2*v^2*z^3+3*u*v^3*z^3-v^4*z^3-u^3*z^4$   
 $+3*u^2*v*z^4-3*u*v^2*z^4+v^3*z^4, u^4*z^3-6*u^2*v^2*z^3+8*u*v^3*z^3$   
 $-3*v^4*z^3-4*u^3*z^4+12*u^2*v*z^4-12*u*v^2*z^4+4*v^3*z^4,$   
 $u^3*v^2*z^2-2*u^2*v^3*z^2+u*v^4*z^2-2*u^2*v^2*z^3+4*u*v^3*z^3$   
 $-2*v^4*z^3-u^3*z^4+4*u^2*v*z^4-5*u*v^2*z^4+2*v^3*z^4,$   
 $u^4*v*z^2-3*u^2*v^3*z^2+2*u*v^4*z^2-6*u^2*v^2*z^3+12*u*v^3*z^3$   
 $-6*v^4*z^3-4*u^3*z^4+15*u^2*v*z^4-18*u*v^2*z^4+7*v^3*z^4,$   
 $u^3*v^3*z-u^2*v^4*z-3*u^2*v^3*z^2+3*u*v^4*z^2+3*u*v^3*z^3-3*v^4*z^3$   
 $-u^3*z^4+4*u^2*v*z^4-6*u*v^2*z^4+3*v^3*z^4, u^4*v^2*z-u^2*v^4*z$   
 $-6*u^2*v^3*z^2+6*u*v^4*z^2-3*u^2*v^2*z^3+12*u*v^3*z^3-9*v^4*z^3$   
 $-4*u^3*z^4+16*u^2*v*z^4-22*u*v^2*z^4+10*v^3*z^4,$   
 $u^3*v^4-4*u^2*v^4*z+6*u*v^4*z^2-4*v^4*z^3-u^3*z^4+4*u^2*v*z^4$   
 $-6*u*v^2*z^4+4*v^3*z^4, u^4*v^3-4*u^2*v^4*z-6*u^2*v^3*z^2$   
 $+12*u*v^4*z^2+8*u*v^3*z^3-12*v^4*z^3-4*u^3*z^4+16*u^2*v*z^4$   
 $-24*u*v^2*z^4+13*v^3*z^4\}\}$
- 16  $\{\{\text{ideal}(v,u), 4\}, \{\text{ideal}(v^2+1/18*u*z-13/9*v*z+7/18*z^2,$   
 $u*v-7/18*u*z-8/9*v*z+5/18*z^2, u^2-23/18*u*z+11/9*v*z-17/18*z^2), 3\}\}$   
 $\text{matrix} \{\{v^5+343/6912*u^4*z-637/3456*u^3*v*z+301/864*u^2*v^2*z$   
 $-1667/3456*u*v^3*z-3989/2304*v^4*z-91/3456*u^3*z^2$   
 $-145/1152*u^2*v*z^2+1627/3456*u*v^2*z^2+785/1152*v^3*z^2,$   
 $u*v^4+245/6912*u^4*z+49/3456*u^3*v*z-163/864*u^2*v^2*z$   
 $-4657/3456*u*v^3*z-1183/2304*v^4*z-281/3456*u^3*z^2$   
 $+85/1152*u^2*v*z^2+2201/3456*u*v^2*z^2+427/1152*v^3*z^2,$   
 $u^2*v^3+175/6912*u^4*z+395/3456*u^3*v*z-1127/864*u^2*v^2*z$   
 $-2699/3456*u*v^3*z-125/2304*v^4*z-355/3456*u^3*z^2$   
 $+407/1152*u^2*v*z^2+1891/3456*u*v^2*z^2+233/1152*v^3*z^2,$

$$\begin{aligned}
& u^3v^2+125/6912u^4z-2423/3456u^3vz-751/864u^2v^2z \\
& -2185/3456uv^3z+425/2304v^4z+271/3456u^3z^2 \\
& +397/1152u^2vz^2+1649/3456uv^2z^2+115/1152v^3z^2, \\
& u^4v-2873/6912u^4z-6061/3456u^3vz-251/864u^2v^2z \\
& +3757/3456uv^3z-1445/2304v^4z+2261/3456u^3z^2 \\
& +383/1152u^2vz^2-725/3456uv^2z^2+257/1152v^3z^2, \\
& u^5-17851/6912u^4z-4319/3456u^3vz-187/864u^2v^2z \\
& -289/3456uv^3z+4913/2304v^4z+4855/3456u^3z^2 \\
& +3589/1152u^2vz^2-2935/3456uv^2z^2-3077/1152v^3z^2\}
\end{aligned}$$

17  $\{\{\text{ideal}(v, u), 6\}, \{\text{ideal}(v^2+1/18uz-13/9vz+7/18z^2, uv-7/18uz-8/9vz+5/18z^2, u^2-23/18uz+11/9vz-17/18z^2), 5\},$   
 $\{\text{ideal } 1, 4\}, \{\text{ideal } 1, 3\}, \{\text{ideal } 1, 2\}\}$   
matrix  $\{\{143327232v^9+823543u^8z-5411854u^7vz$   
 $+17042298u^6v^2z-35088214u^5v^3z+52072888u^4v^4z$   
 $-66112074u^3v^5z+65143078u^2v^6z-84490834uv^7z$   
 $-517287759v^8z-1310946u^7z^2+3702342u^6vz^2$   
 $-10290u^5v^2z^2-25039098u^4v^3z^2+85291626u^3v^4z^2$   
 $-160373118u^2v^5z^2+298235562uv^6z^2+659467314v^7z^2$   
 $-193452u^6z^3+6738480u^5vz^3-15448188u^4v^2z^3$   
 $+9362496u^3v^3z^3+73559196u^2v^4z^3-292138608uv^5z^3$   
 $-355188852v^6z^3+348712u^5z^4-362056u^4vz^4$   
 $-15167280u^3v^2z^4+4170160u^2v^3z^4+85597448uv^4z^4$   
 $+68740248v^5z^4,$   
 $143327232uv^8+588245u^8z-1445402u^7vz-2002434u^6v^2z$   
 $+14895118u^5v^3z-37379944u^4v^4z+52539858u^3v^5z$   
 $-76498654u^2v^6z-448195526uv^7z-75810189v^8z$   
 $-1973622u^7z^2+5756226u^6vz^2-12729318u^5v^2z^2$   
 $+28965762u^4v^3z^2-65246898u^3v^4z^2+156631638u^2v^5z^2$   
 $+557707278uv^6z^2+190852326v^7z^2+962556u^6z^3$   
 $+3591504u^5vz^3-8919348u^4v^2z^3+43658304u^3v^3z^3$   
 $-118011564u^2v^4z^3-344521104uv^5z^3-150069276v^6z^3$   
 $+516920u^5z^4-4767128u^4vz^4-12893712u^3v^2z^4$   
 $+38151056u^2v^3z^4+84925144uv^4z^4+37394952v^5z^4,$   
 $143327232u^2v^7+420175u^8z+696290u^7vz-4443222u^6v^2z$   
 $+2602586u^5v^3z+11332888u^4v^4z-45156474u^3v^5z$   
 $-389281418u^2v^6z-149245378uv^7z-234375v^8z$   
 $-2150610u^7z^2+237846u^6vz^2+7076958u^5v^2z^2$

-26466858\*u^4\*v^3\*z^2+64081434\*u^3\*v^4\*z^2+464405874\*u^2\*v^5\*z^2  
 +313198170\*u\*v^6\*z^2+39580578\*v^7\*z^2+2780148\*u^6\*z^3  
 -795600\*u^5\*v\*z^3+19765284\*u^4\*v^2\*z^3-35024064\*u^3\*v^3\*z^3  
 -261654660\*u^2\*v^4\*z^3-240217968\*u\*v^5\*z^3-58162068\*v^6\*z^3  
 -132632\*u^5\*z^4-9476872\*u^4\*v\*z^4+3844176\*u^3\*v^2\*z^4  
 +61682224\*u^2\*v^3\*z^4+67067336\*u\*v^4\*z^4+20343000\*v^5\*z^4,  
 143327232\*u^3\*v^6+300125\*u^8\*z+1732150\*u^7\*v\*z-245490\*u^6\*v^2\*z  
 -9107042\*u^5\*v^3\*z+7910456\*u^4\*v^4\*z-367637310\*u^3\*v^5\*z  
 -199864942\*u^2\*v^6\*z-7193750\*u\*v^7\*z+796875\*v^8\*z  
 -2065350\*u^7\*z^2-6951630\*u^6\*v\*z^2+7770954\*u^5\*v^2\*z^2  
 -1399950\*u^4\*v^3\*z^2+362235102\*u^3\*v^4\*z^2+389263782\*u^2\*v^5\*z^2  
 +109816734\*u\*v^6\*z^2+1293750\*v^7\*z^2+4413660\*u^6\*z^3  
 +6771024\*u^5\*v\*z^3+8146092\*u^4\*v^2\*z^3-170795712\*u^3\*v^3\*z^3  
 -269730828\*u^2\*v^4\*z^3-133246608\*u\*v^5\*z^3-18866556\*v^6\*z^3  
 -2593672\*u^5\*z^4-7736792\*u^4\*v\*z^4+27303024\*u^3\*v^2\*z^4  
 +67449104\*u^2\*v^3\*z^4+47839000\*u\*v^4\*z^4+1066568\*v^5\*z^4,  
 143327232\*u^4\*v^5+214375\*u^8\*z+2119250\*u^7\*v\*z+5545050\*u^6\*v^2\*z  
 -3140470\*u^5\*v^3\*z-325839752\*u^4\*v^4\*z-209950506\*u^3\*v^5\*z  
 -59416250\*u^2\*v^6\*z+19868750\*u\*v^7\*z-2709375\*v^8\*z-1853250\*u^7\*z^2  
 -13162650\*u^6\*v\*z^2-18014610\*u^5\*v^2\*z^2+283715622\*u^4\*v^3\*z^2  
 +390527562\*u^3\*v^4\*z^2+209173218\*u^2\*v^5\*z^2+11546250\*u\*v^6\*z^2  
 -1968750\*v^7\*z^2+5553300\*u^6\*z^3+25262640\*u^5\*v\*z^3  
 -91341372\*u^4\*v^2\*z^3-242202048\*u^3\*v^3\*z^3-208130724\*u^2\*v^4\*z^3  
 -59098224\*u\*v^5\*z^3-3352500\*v^6\*z^3-6341720\*u^5\*z^4  
 +4886072\*u^4\*v\*z^4+44946384\*u^3\*v^2\*z^4+61640368\*u^2\*v^3\*z^4  
 +32174216\*u\*v^4\*z^4+6021912\*v^5\*z^4,  
 143327232\*u^5\*v^4+153125\*u^8\*z+2143750\*u^7\*v\*z+10638750\*u^6\*v^2\*z  
 -226881362\*u^5\*v^3\*z-320526376\*u^4\*v^4\*z-105520590\*u^3\*v^5\*z  
 +109419650\*u^2\*v^6\*z-51947750\*u\*v^7\*z+9211875\*v^8\*z-1593750\*u^7\*z^2  
 -17478750\*u^6\*v\*z^2+96323322\*u^5\*v^2\*z^2+437832162\*u^4\*v^3\*z^2  
 +365876718\*u^3\*v^4\*z^2-36579210\*u^2\*v^5\*z^2+17151150\*u\*v^6\*z^2  
 -1568250\*v^7\*z^2+6157500\*u^6\*z^3+4227408\*u^5\*v\*z^3  
 -177413748\*u^4\*v^2\*z^3-278860224\*u^3\*v^3\*z^3-107237484\*u^2\*v^4\*z^3  
 -22638480\*u\*v^5\*z^3  
 +2456100\*v^6\*z^3-5672008\*u^5\*z^4+18623464\*u^4\*v\*z^4  
 +57021168\*u^3\*v^2\*z^4+48906896\*u^2\*v^3\*z^4+21199192\*u\*v^4\*z^4  
 +3248520\*v^5\*z^4,  
 143327232\*u^6\*v^3+109375\*u^8\*z+1981250\*u^7\*v\*z-170057334\*u^6\*v^2\*z

-360067270\*u^5\*v^3\*z-33845288\*u^4\*v^4\*z+43421094\*u^3\*v^5\*z  
 -147092330\*u^2\*v^6\*z+123561950\*u\*v^7\*z-31320375\*v^8\*z-1331250\*u^7\*z^2  
 +59135286\*u^6\*v\*z^2+384971262\*u^5\*v^2\*z^2+219478518\*u^4\*v^3\*z^2  
 +153490170\*u^3\*v^4\*z^2+165720786\*u^2\*v^5\*z^2-154924230\*u\*v^6\*z^2  
 +33422850\*v^7\*z^2-4979148\*u^6\*z^3-126096336\*u^5\*v\*z^3  
 -141574044\*u^4\*v^2\*z^3-196787904\*u^3\*v^3\*z^3-147577284\*u^2\*v^4\*z^3  
 +46846608\*u\*v^5\*z^3-3140820\*v^6\*z^3+12355432\*u^5\*z^4  
 +21382520\*u^4\*v\*z^4+49083216\*u^3\*v^2\*z^4+48944944\*u^2\*v^3\*z^4  
 +9340232\*u\*v^4\*z^4+2220888\*v^5\*z^4,  
 143327232\*u^7\*v^2+78125\*u^8\*z-121115306\*u^7\*v\*z-489823314\*u^6\*v^2\*z  
 -78196418\*u^5\*v^3\*z+151188344\*u^4\*v^4\*z+56811042\*u^3\*v^5\*z  
 +40964594\*u^2\*v^6\*z-239705270\*u\*v^7\*z+106489275\*v^8\*z+25236762\*u^7\*z^2  
 +393125010\*u^6\*v\*z^2+526228266\*u^5\*v^2\*z^2+190339794\*u^4\*v^3\*z^2  
 -605319042\*u^3\*v^4\*z^2+7887558\*u^2\*v^5\*z^2+531611454\*u\*v^6\*z^2  
 -209146410\*v^7\*z^2-78242916\*u^6\*z^3-342450864\*u^5\*v\*z^3  
 -304988820\*u^4\*v^2\*z^3+323297088\*u^3\*v^3\*z^3+28568628\*u^2\*v^4\*z^3  
 -278117520\*u\*v^5\*z^3+78625476\*v^6\*z^3+57526520\*u^5\*z^4  
 +78405544\*u^4\*v\*z^4-31898256\*u^3\*v^2\*z^4-1329136\*u^2\*v^3\*z^4  
 +46920088\*u\*v^4\*z^4-6297528\*v^5\*z^4,  
 143327232\*u^8\*v-61370153\*u^8\*z-601089358\*u^7\*v\*z-192921798\*u^6\*v^2\*z  
 -93281686\*u^5\*v^3\*z-148543688\*u^4\*v^4\*z+301648374\*u^3\*v^5\*z  
 +382693222\*u^2\*v^6\*z+201619694\*u\*v^7\*z-362063535\*v^8\*z+247335006\*u^7\*z^2  
 +872140422\*u^6\*v\*z^2+985533198\*u^5\*v^2\*z^2+163774278\*u^4\*v^3\*z^2  
 -126888918\*u^3\*v^4\*z^2-1593984702\*u^2\*v^5\*z^2-723773334\*u\*v^6\*z^2  
 +1035827442\*v^7\*z^2-300707628\*u^6\*z^3-713657808\*u^5\*v\*z^3  
 -1122113532\*u^4\*v^2\*z^3-184108992\*u^3\*v^3\*z^3+1915140636\*u^2\*v^4\*z^3  
 +621729168\*u\*v^5\*z^3-789590772\*v^6\*z^3+99863848\*u^5\*z^4  
 +419453624\*u^4\*v\*z^4+196077264\*u^3\*v^2\*z^4-467653712\*u^2\*v^3\*z^4  
 -225162232\*u\*v^4\*z^4+120748440\*v^5\*z^4,  
 143327232\*u^9-699046027\*u^8\*z-258697178\*u^7\*v\*z-308150466\*u^6\*v^2\*z  
 -755261618\*u^5\*v^3\*z-872116456\*u^4\*v^4\*z-768226158\*u^3\*v^5\*z  
 +457193954\*u^2\*v^6\*z+1399979002\*u\*v^7\*z+1231016019\*v^8\*z  
 +1121446986\*u^7\*z^2+1490529282\*u^6\*v\*z^2+1425468378\*u^5\*v^2\*z^2  
 +3552207426\*u^4\*v^3\*z^2+2895497358\*u^3\*v^4\*z^2-34636650\*u^2\*v^5\*z^2  
 -4964655282\*u\*v^6\*z^2-4625894106\*v^7\*z^2-599972484\*u^6\*z^3  
 -2470517424\*u^5\*v\*z^3-3263186868\*u^4\*v^2\*z^3-4321693632\*u^3\*v^3\*z^3  
 -1863419436\*u^2\*v^4\*z^3+6494939760\*u\*v^5\*z^3+5450541156\*v^6\*z^3  
 +17022008\*u^5\*z^4+1144487272\*u^4\*v\*z^4+3044463600\*u^3\*v^2\*z^4  
 +914944400\*u^2\*v^3\*z^4-2988937256\*u\*v^4\*z^4-1988652792\*v^5\*z^4}}

### 24.1.1 Rechenzeiten

$T_{a1}$  gibt die Rechenzeit zur Berechnung des adjungierten Ideals mit der Funktion *adjs* aus Abschnitt 28.1 an.  $T_{a2}$  gibt die Rechenzeit zur Berechnung des adjungierten Ideals mit *adjointCurve* aus dem *CASA*-Paket (Research Institute for Symbolic Computation (RISC-Linz), University of Linz) an:

Beispiel	$T_{a1}/\text{sec}$	$T_{a2}/\text{sec}$
1	0.17	0.4
3	0.57	0.9
7	17.16	8.9
8	10.3	61.1
9	0.23	0.8
10	1.71	1.8
12	5.3	91.4
13	11.3	6.6
14	3.6	23
16	10.1	8.5
17	314	3116

### 24.2 Berechnung des adjungierten Ideals aus einer Ganzheitsbasis

Bei den Beispielen ist eine Matrix angegeben, die Erzeuger des adjungierten Ideals enthält.

$$2 \text{ adj} = \text{matrix} \{ \{v^2 - u \cdot z, u \cdot v, u^2\} \}$$

$$4 \text{ adj} = \text{matrix} \{ \{v^6 - 77 \cdot u^5 \cdot z - 166 \cdot u^4 \cdot v \cdot z - 76 \cdot u^3 \cdot v^2 \cdot z + 3 \cdot u \cdot v^4 \cdot z + 6 \cdot v^5 \cdot z - 242 \cdot u^4 \cdot z^2 - 152 \cdot u^3 \cdot v \cdot z^2 + 3 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot z^2 + 12 \cdot u \cdot v^3 \cdot z^2 + 15 \cdot v^4 \cdot z^2 - 75 \cdot u^3 \cdot z^3 + 6 \cdot u^2 \cdot v \cdot z^3 + 18 \cdot u \cdot v^2 \cdot z^3 + 20 \cdot v^3 \cdot z^3 + 3 \cdot u^2 \cdot z^4 + 12 \cdot u \cdot v \cdot z^4 + 15 \cdot v^2 \cdot z^4 + 3 \cdot u \cdot z^5 + 6 \cdot v \cdot z^5 + z^6, u \cdot v^5 + 34 \cdot u^5 \cdot z + 77 \cdot u^4 \cdot v \cdot z + 34 \cdot u^3 \cdot v^2 \cdot z + 2 \cdot u^2 \cdot v^3 \cdot z + 5 \cdot u \cdot v^4 \cdot z + 111 \cdot u^4 \cdot z^2 + 69 \cdot u^3 \cdot v \cdot z^2 + 6 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot z^2 + 10 \cdot u \cdot v^3 \cdot z^2 + 35 \cdot u^3 \cdot z^3 + 6 \cdot u^2 \cdot v \cdot z^3 + 10 \cdot u \cdot v^2 \cdot z^3 + 2 \cdot u^2 \cdot z^4 + 5 \cdot u \cdot v \cdot z^4 + u \cdot z^5, u^2 \cdot v^4 - 16 \cdot u^5 \cdot z - 38 \cdot u^4 \cdot v \cdot z - 15 \cdot u^3 \cdot v^2 \cdot z + 4 \cdot u^2 \cdot v^3 \cdot z - 54 \cdot u^4 \cdot z^2 - 30 \cdot u^3 \cdot v \cdot z^2 + 6 \cdot u^2 \cdot v^2 \cdot z^2 - 15 \cdot u^3 \cdot z^3 + 4 \cdot u^2 \cdot v \cdot z^3 + u^2 \cdot z^4, u^3 \cdot v^3 + 8 \cdot u^5 \cdot z + 20 \cdot u^4 \cdot v \cdot z + 11 \cdot u^3 \cdot v^2 \cdot z + 28 \cdot u^4 \cdot z^2 + 19 \cdot u^3 \cdot v \cdot z^2 + 9 \cdot u^3 \cdot z^3, u^4 \cdot v^2 - 4 \cdot u^5 \cdot z - 8 \cdot u^4 \cdot v \cdot z - 4 \cdot u^3 \cdot v^2 \cdot z - 13 \cdot u^4 \cdot z^2 - 8 \cdot u^3 \cdot v \cdot z^2 - 4 \cdot u^3 \cdot z^3, u^5 \cdot v + 3 \cdot u^5 \cdot z + 5 \cdot u^4 \cdot v \cdot z + 2 \cdot u^3 \cdot v^2 \cdot z + 7 \cdot u^4 \cdot z^2 + 4 \cdot u^3 \cdot v \cdot z^2 + 2 \cdot u^3 \cdot z^3, u^6 - 2 \cdot u^4 \cdot v \cdot z - u^3 \cdot v^2 \cdot z - 3 \cdot u^4 \cdot z^2 - 2 \cdot u^3 \cdot v \cdot z^2 - u^3 \cdot z^3 \}$$

$$5 \text{ adj} = \text{matrix} \{ \{u^2 \cdot v \cdot z - 8/41 \cdot u \cdot v^2 \cdot z - 12/41 \cdot v^3 \cdot z - 72/41 \cdot u \cdot z^3 - 36/41 \cdot v \cdot z^3, u^3 \cdot z - 92/41 \cdot u \cdot v^2 \cdot z - 15/41 \cdot v^3 \cdot z - 90/41 \cdot u \cdot z^3 - 45/41 \cdot v \cdot z^3, u^2 \cdot v^2 + v^4 - 24/13 \cdot u^2 \cdot z^2 - 6/13 \cdot u \cdot v \cdot z^2 + 3 \cdot v^2 \cdot z^2, \}$$

$$u^3*v+u*v^3-36/13*u^2*z^2-9/13*u*v*z^2, \\ u^4-v^4-30/13*u^2*z^2-66/13*u*v*z^2-3*v^2*z^2\}}$$

**p1**  $p(C) = 1:$

$$F = u^5 - 2*u^3*v^2 + u*v^4 + v^5 + 2*u^4*z - 3*u^2*v^2*z + v^4*z + u^3*z^2 - u*v^2*z^2$$

Ganzheitsbasis ( $z = 1$ ):

$$ib = \text{matrix}\{\{1, v, v^2, 1/u/(u+1)*v^3+v^2/u, \\ 1/(u+1)/u^2*v^4 - (-1+u)/u^2*v^3 + (-1+u)/u*v^2 + (-1+u)/u*v\}\} \\ adj = \text{matrix}\{\{v^2, u^2*v+u*v*z, u^3+u^2*z\}\}$$

**p4**  $p(C) = 4:$

$$F = 5*v^6 + 7*v^2*u^4 + 6*u^6 + 21*v^2*u^3 + 12*u^5 + 21*v^2*u^2 + 6*u^4 + 7*v^2*u$$

Ganzheitsbasis ( $z = 1$ ):

$$ib = \text{matrix}\{\{1, v, v^2, v^3/(u+1), v^4/(u^2+u), \\ (v^5-7/5*v*u^3+7/5*v*u)/(u^3+u^2)\}\} \\ adj = \text{matrix}\{\{u^3+u^2*z, u^2*v+u*v*z, u*v^2+v^2*z, v^3\}\}$$

### 24.3 Berechnung des adjungierten Ideals aus der freien Auflösung des Jacobiideals

$$F = v^4 - 2*u^3*z + 3*u^2*z^2 - 2*v^2*z^2$$

Freie Auflösung des Jacobiideals  $J_F$ :

$$0 \rightarrow R^3 \xrightarrow{h_2} R^5 \xrightarrow{h_1} R^3 \xrightarrow{h_0} J_F \rightarrow 0$$

$$h_0 = \begin{pmatrix} u^3 - 3u^2z + 2v^2 * z & v^3 - vz^2 & u^2z - uz^2 \\ -v^3 + vz^2 & 0 & \frac{1}{2}u^2z - \frac{1}{2}uz^2 & \dots \\ u^3 - 3u^2z + 2v^2z & -u^2z + uz^2 & 0 & \dots \\ 0 & v^3 - vz^2 & -\frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2z - v^2z & \dots \\ \dots & -\frac{1}{2}uvz & -\frac{1}{2}v^2z - \frac{1}{2}uz^2 + \frac{1}{2}z^3 & \\ \dots & uz^2 & vz^2 & \\ \dots & \frac{1}{2}u^2v - uvz - vz^2 & \frac{1}{2}uv^2 + \frac{1}{2}u^2z - v^2z - \frac{3}{2}uz^2 & \end{pmatrix} \\ h_2 = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ u - 2z & z & 0 \\ 0 & v & z \\ 2z & u - z & -v \\ -2v & 0 & u \end{pmatrix}$$

Einziger Kernvektor von  $h_2 \otimes R/J_F$  vom Grad 2:

$$\begin{pmatrix} 2uv - 2vz \\ 2v^2 - 2uz \\ u^2 - uz \end{pmatrix}$$

Minimale Erzeuger des Untermoduls von  $(R/J_F)^3$  erzeugt von den Spalten von  $h_1 \otimes R/J_F$  stehen in den Spalten von

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}uvz & -\frac{1}{2}v^2z - \frac{1}{2}uz^2 + \frac{1}{2}z^3 \\ uz^2 & vz^2 \\ \frac{1}{2}u^2v - uvz - vz^2 & \frac{1}{2}uv^2 + \frac{1}{2}u^2z - v^2z - \frac{3}{2}uz^2 \end{pmatrix}$$

Syzygienmatrix davon über  $R/J_F$ :

$$d_1 = \begin{pmatrix} -z & u - z & -v \\ v & 0 & u \end{pmatrix}$$

ist Hilbert-Burch-Matrix des adjungierten Ideals.  $2 \times 2$ -Minoren von  $d_1$ :

$$-uv + vz, v^2 - uz, u^2 - uz$$

Weitere Beispiele mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten und Matrix  $adj$  mit Erzeugern des adjungierten Ideals:

$$\begin{aligned} F &= u^4 - 1/5u^3v + u^2v^2 - 6/5uv^3 + 1/5v^4 + 3u^3z - 8/5u^2vz \\ &+ 1/5uv^2z + 3u^2z^2 - 4/5uv^2z^2 - 2/5v^2z^2 + uz^3 + 1/5z^4 \\ adj &= \text{matrix} \left\{ \left\{ v^2 + 32/33uz - 2/11vz + 41/33z^2, \right. \right. \\ &u^2 + 62/33uz - 8/11vz + 32/33z^2 \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= u^3v^2 + 7/3u^2v^3 + 16/9uv^4 + 4/9v^5 - 4/3u^3vz \\ &- 47/9u^2v^2z - 6uv^3z - 20/9v^4z + 7/9u^3z^2 \\ &+ 41/9u^2vz^2 + 73/9uv^2z^2 + 41/9v^3z^2 - 13/9u^2z^3 \\ &- 46/9uvz^3 - 43/9v^2z^3 + 4/3u^2z^4 + 23/9vz^4 - 5/9z^5 \\ adj &= \text{matrix} \left\{ \left\{ u^2z + 3/2uvz + 2/3v^2z - 7/6uz^2 - 3/2vz^2 + z^3, \right. \right. \\ &v^3 + 1/2uvz - 4v^2z + 1/2uz^2 + 5vz^2 - 5/2z^3, \\ &uv^2 - 2uvz + 5/3v^2z + 1/3uz^2 - 3vz^2 + 2z^3, \\ &u^2v + 3/2uvz - 4/3v^2z - 5/6uz^2 + 13/6vz^2 - 4/3z^3 \left. \right\} \end{aligned}$$

## 25 Parametrisierung rationaler Kurven

### 25.1 Detaillierte Beispielrechnungen

$C = V(F)$ . Verwende im folgenden die Notation aus Abschnitt 19.2 mit  $L = \mathbb{C}$  und  $K = \mathbb{Q}$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{n-2} &= {}_L \langle A_0, \dots, A_{n-2} \rangle, \\ S &= \{[\text{Koordinaten der Singularität, Multiplizität, Verzweigungsindex}], \dots\} \\ \Phi &: C \rightarrow C_{n-2}, \\ &\text{rationale Normkurve } C_{n-2} \subset \mathbb{P}_L^{n-2} \end{aligned}$$

- Für  $n$  ungerade:

$$\begin{aligned} &\text{Folge von birationalen Transformationen } C_{n-2} \xrightarrow{\Phi_{n-2}} C_{n-4} \rightarrow \dots \xrightarrow{\Phi_3} \mathbb{P}_L^1, \\ &\text{rationale Normkurven } C_j \subset \mathbb{P}_L^j, \\ &\text{birationale Transformation } \Psi' : C \rightarrow \mathbb{P}_L^1, \Psi' = \Phi_3 \circ \dots \circ \Phi_{n-2} \circ \Phi, \\ &\text{birationale Transformation } \Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C. \end{aligned}$$

- für  $n$  gerade:

Folge von birationalen Transformationen  $C_{n-2} \xrightarrow{\Phi_{n-2}} C_{n-4} \rightarrow \dots \xrightarrow{\Phi_4} C_2$ ,

rationale Normkurven  $C_j \subset \mathbb{P}_L^j$ ,

birationale Transformation  $\Psi' : C \rightarrow C_2$ ,  $\Psi' = \Phi_4 \circ \dots \circ \Phi_{n-2} \circ \Phi$ ,

birationale Transformation  $\Psi'' : C_2 \rightarrow C$ ,

Punkt  $P$  auf der Konik

Parametrisierung  $\varphi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C_2$  der Konik  $C_2$ ,

Parametrisierung  $\Psi : \mathbb{P}_L^1 \rightarrow C$ ,  $\Psi = \Psi'' \circ \varphi$  von  $C$ .

Bei birationalen Transformationen wird ein Repräsentant angegeben und bei diesem nur die Abbildungsvorschrift. Schreibe der Einfachheit halber (birationale Transformation)=(Repräsentant). Die Beispiele sind mit der Nummer aus Abschnitt 23 bezeichnet.

### 1. $n = 4$

$$F = v^4 - 2u^3z + 3u^2z^2 - 2v^2z^2$$

$$\{A_0, \dots, A_2\} = \{v^2 - uz, uv - vz, u^2 - uz\}$$

$$S = \{[[1, 1, 1], 2, 1], [[1, -1, 1], 2, 1], [[0, 0, 1], 2, 1]\}$$

$$\Phi_2 = \Psi' = \{v^2 - uz, uv - vz, u^2 - uz\}$$

$$I(C_2) = \text{ideal}(y_0^2 - 2y_1^2 + 2y_0y_2)$$

$$\Psi'' = \{y_0y_2 - y_2^2, y_0y_1 - y_1y_2, -y_1^2 + y_0y_2\}$$

$$P = (0 : 0 : 1)$$

$$\varphi = \{r_0^2, -(r_0r_1), -1/2r_0^2 + r_1^2\}$$

$$\Psi =$$

$$\{-3r_0^4 + 8r_0^2r_1^2 - 4r_1^4\},$$

$$\{-6r_0^3r_1 + 4r_0r_1^3\},$$

$$\{-(2r_0^4)\}$$

### 2. $n = 4$

$$F = (v^2 - uz)^2 - u^3z$$

$$\{A_0, \dots, A_2\} = \{v^2 - uz, uv, u^2\}$$

$$S = \{[[0, 0, 1], 2, 3]\}$$

$$\Phi_2 = \Psi' = \{v^2 - uz, uv, u^2\}$$

$$I(C_2) = \text{ideal}(y_0^2 - y_1^2 + y_0y_2)$$

$$\Psi'' = \{y_2^2, y_1y_2, y_1^2 - y_0y_2\}$$

$$P = (0 : 0 : 1)$$

$$\varphi = \{r_0^2, -(r_0r_1), -r_0^2 + r_1^2\}$$

$$\Psi =$$

$$\{r_0^4 - 2r_0^2r_1^2 + r_1^4\},$$

$$\{r_0^3r_1 - r_0r_1^3\},$$

$$\{r_0^4\}$$

3.  $n = 5$

$$\begin{aligned}
F &= v^5 + 2*u*v^2*z^2 + 2*u*v^3*z + u^2*v*z^2 - 4*u^3*v*z + 2*u^5 \\
\{A_0, \dots, A_3\} &= \{v^3 + u*v*z, u*v^2 + u^2*z, u^2*v - v^2*z, u^3 - u*v*z\} \\
S &= \{[[[0, 0, 1], 3, 3], \\
&[-1, 1, 1], 2, 1], [[\text{RootOf}(T^2 - T + 1), -1 + \text{RootOf}(T^2 - T + 1), 1], 2, 1]\} \\
I(C_3) &= \text{ideal}(x_1*x_2 - x_0*x_3, x_0^2 + 2*x_2*x_3, x_0*x_1 + 2*x_3^2) \\
\Phi_3 &= \{x_3, x_1\} \\
\Psi' &= \{u^3 - u*v*z, u*v^2 + u^2*z\} \\
\Psi &= \\
&\{y_0^4*y_1 - 2*y_0^3*y_1^2, \\
&\{-2*y_0^2*y_1^3 + 4*y_0*y_1^4, \\
&\{y_0^5 - 4*y_1^5\}\}
\end{aligned}$$

4.  $n = 8$

$$\begin{aligned}
F &= 25*u^8 + 184*u^7*v + 518*u^6*v^2 + 720*u^5*v^3 + 576*u^4*v^4 \\
&+ 282*u^3*v^5 + 84*u^2*v^6 + 14*u*v^7 + v^8 + 244*u^7*z + 1326*u^6*v*z \\
&+ 2646*u^5*v^2*z + 2706*u^4*v^3*z + 1590*u^3*v^4*z + 546*u^2*v^5*z \\
&+ 102*u*v^6*z + 8*v^7*z + 854*u^6*z^2 + 3252*u^5*v*z^2 + 4770*u^4*v^2*z^2 \\
&+ 3582*u^3*v^3*z^2 + 1476*u^2*v^4*z^2 + 318*u*v^5*z^2 + 28*v^6*z^2 \\
&+ 1338*u^5*z^3 + 3740*u^4*v*z^3 + 4030*u^3*v^2*z^3 + 2124*u^2*v^3*z^3 \\
&+ 550*u*v^4*z^3 + 56*v^5*z^3 + 1101*u^4*z^4 + 2264*u^3*v*z^4 \\
&+ 1716*u^2*v^2*z^4 + 570*u*v^3*z^4 + 70*v^4*z^4 + 508*u^3*z^5 \\
&+ 738*u^2*v*z^5 + 354*u*v^2*z^5 + 56*v^3*z^5 + 132*u^2*z^6 + 122*u*v*z^6 \\
&+ 28*v^2*z^6 + 18*u*z^7 + 8*v*z^7 + z^8 \\
\{A_0, \dots, A_6\} &= \\
&\{v^6 - 77*u^5*z - 166*u^4*v*z - 76*u^3*v^2*z + 3*u*v^4*z + 6*v^5*z \\
&- 242*u^4*z^2 - 152*u^3*v*z^2 + 3*u^2*v^2*z^2 + 12*u*v^3*z^2 + 15*v^4*z^2 \\
&- 75*u^3*z^3 + 6*u^2*v*z^3 + 18*u*v^2*z^3 + 20*v^3*z^3 + 3*u^2*z^4 \\
&+ 12*u*v*z^4 + 15*v^2*z^4 + 3*u*z^5 + 6*v*z^5 + z^6, \\
&u*v^5 + 34*u^5*z + 77*u^4*v*z + 34*u^3*v^2*z + 2*u^2*v^3*z + 5*u*v^4*z \\
&+ 111*u^4*z^2 + 69*u^3*v*z^2 + 6*u^2*v^2*z^2 + 10*u*v^3*z^2 + 35*u^3*z^3 \\
&+ 6*u^2*v*z^3 + 10*u*v^2*z^3 + 2*u^2*z^4 + 5*u*v*z^4 + u*z^5, \\
&u^2*v^4 - 16*u^5*z - 38*u^4*v*z - 15*u^3*v^2*z + 4*u^2*v^3*z - 54*u^4*z^2 \\
&- 30*u^3*v*z^2 + 6*u^2*v^2*z^2 - 15*u^3*z^3 + 4*u^2*v*z^3 + u^2*z^4, \\
&u^3*v^3 + 8*u^5*z + 20*u^4*v*z + 11*u^3*v^2*z + 28*u^4*z^2 \\
&+ 19*u^3*v*z^2 + 9*u^3*z^3, \\
&u^4*v^2 - 4*u^5*z - 8*u^4*v*z - 4*u^3*v^2*z - 13*u^4*z^2 - 8*u^3*v*z^2 \\
&- 4*u^3*z^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u^5*v+3*u^5*z+5*u^4*v*z+2*u^3*v^2*z+7*u^4*z^2+4*u^3*v*z^2 \\
& +2*u^3*z^3, \\
& u^6-2*u^4*v*z-u^3*v^2*z-3*u^4*z^2-2*u^3*v*z^2-u^3*z^3\} \\
S = & \\
& \{[0, -1, 1], 4, 18], \\
& [[-1, -1, 1], 2, 1], [[-1, 1, 1], 2, 1], [[1, -3, 1], 2, 1]\} \\
\Psi' = & \\
& \{ \{806*u^4*v^2+760*u^3*v^3+295*u^2*v^4+60*u*v^5+5*v^6-209*u^5*z \\
& +1332*u^4*v*z+2371*u^3*v^2*z+1300*u^2*v^3*z+315*u*v^4*z+30*v^5*z \\
& +322*u^4*z^2+2522*u^3*v*z^2+2145*u^2*v^2*z^2+660*u*v^3*z^2+75*v^4*z^2 \\
& +916*u^3*z^3+1570*u^2*v*z^3+690*u*v^2*z^3+100*v^3*z^3+430*u^2*z^4 \\
& +360*u*v*z^4+75*v^2*z^4+75*u*z^5+30*v*z^5+5*z^6\}, \\
& \{806*u^5*v-304*u^3*v^3-118*u^2*v^4-24*u*v^5-2*v^6+1212*u^5*z \\
& +918*u^4*v*z-626*u^3*v^2*z-520*u^2*v^3*z-126*u*v^4*z-12*v^5*z \\
& +1322*u^4*z^2-364*u^3*v*z^2-858*u^2*v^2*z^2-264*u*v^3*z^2-30*v^4*z^2 \\
& -44*u^3*z^3-628*u^2*v*z^3-276*u*v^2*z^3-40*v^3*z^3-172*u^2*z^4 \\
& -144*u*v*z^4-30*v^2*z^4-30*u*z^5-12*v*z^5-2*z^6\}, \\
& \{806*u^6+152*u^3*v^3+59*u^2*v^4+12*u*v^5+v^6+603*u^5*z-56*u^4*v*z \\
& +313*u^3*v^2*z+260*u^2*v^3*z+63*u*v^4*z+6*v^5*z-258*u^4*z^2 \\
& +182*u^3*v*z^2+429*u^2*v^2*z^2+132*u*v^3*z^2+15*v^4*z^2+22*u^3*z^3 \\
& +314*u^2*v*z^3+138*u*v^2*z^3+20*v^3*z^3+86*u^2*z^4+72*u*v*z^4 \\
& +15*v^2*z^4+15*u*z^5+6*v*z^5+z^6\} \} \\
I(C_2) = & \\
& \text{ideal}(y_0^2+32183/23006*y_0*y_1+5634/11503*y_1^2+7193/23006*y_0*y_2 \\
& +5057/23006*y_1*y_2+575/23006*y_2^2\} \\
P = & (316, -610, 708) \\
\varphi = & \\
& \{ \{90850*y_0^2-799006*y_0*y_1+1780344*y_1^2\}, \\
& \{-175375*y_0^2+1543594*y_0*y_1-3438352*y_1^2\}, \\
& \{202341*y_0^2-1788566*y_0*y_1+3988872*y_1^2\} \} \\
\Psi = & \\
& \{y_0^2*(2*y_1^3+112*y_0*y_1^2+2092*y_0^2*y_1+13033*y_0^3)^2\}, \\
& \{16*y_1^8+2376*y_0*y_1^7+154388*y_0^2*y_1^6+5733296*y_0^3*y_1^5 \\
& +133087160*y_0^4*y_1^4+1977461686*y_0^5*y_1^3+18366203032*y_0^6*y_1^2 \\
& +97488015212*y_0^7*y_1+226422180079*y_0^8\}, \\
& \{-16*y_1^8-2384*y_0*y_1^7-155440*y_0^2*y_1^6-5792596*y_0^3*y_1^5 \\
& -134944584*y_0^4*y_1^4-2012376400*y_0^5*y_1^3-18760067594*y_0^6*y_1^2 \\
& -99956909222*y_0^7*y_1-233056107409*y_0^8\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. F &= 36*u^7+64*u^6*v+1440*u^5*v^2+216*u^4*v^3+120*u^3*v^4 \\
&+1728*u^2*v^5+243*u*v^6+36*v^7-96*u^6*z+108*u^5*v*z+16*u^4*v^2*z \\
&+576*u^3*v^3*z+216*u^2*v^4*z-12*u*v^5*z+216*v^6*z+88*u^5*z^2 \\
&+3456*u^4*v*z^2+243*u^3*v^2*z^2+124*u^2*v^3*z^2+3816*u*v^4*z^2 \\
&+297*v^5*z^2+162*u^4*z^3-20*u^3*v*z^3+936*u^2*v^2*z^3 \\
&+342*u*v^3*z^3-96*v^4*z^3+1944*u^3*z^4+81*u^2*v*z^4 \\
&-32*u*v^2*z^4+1536*v^3*z^4 \\
&\{A_0, \dots, A_5\} = \\
&\{v^5+8/9*u^4*z+2*u*v^3*z-7/9*u^2*v*z^2+8/9*v^2*z^3, \\
&u*v^4+2/3*u^2*v^2*z-1/3*u^3*z^2+4/3*v^3*z^2+4/3*u*v*z^3, \\
&u^2*v^3+u^3*v*z+1/2*v^4*z+2*u*v^2*z^2+3/2*u^2*z^3, \\
&u^3*v^2-1/3*u^4*z-u*v^3*z+5/3*u^2*v*z^2-4/3*v^2*z^3, \\
&u^4*v-1/2*u^2*v^2*z+3/2*u^3*z^2-1/2*v^3*z^2-3/2*u*v*z^3, \\
&u^5-2*u^3*v*z-9/4*v^4*z-7/2*u*v^2*z^2-9/4*u^2*z^3\} \\
S &= \\
&\{[0, 0, 1], 3, 3\}, [[-1, 1, 1], 3, 3], \\
&[[\text{RootOf}(T^3-4), -1/2*\text{RootOf}(T^3-4)^2, 1], 2, 1], \\
&[[\text{RootOf}(T^2-T+1), -1+\text{RootOf}(T^2-T+1), 1], 3, 3\} \\
I(C_5) &= \\
&\text{ideal}(x_1*x_3-x_0*x_4-1/54*x_1*x_4-1/8*x_2*x_4-2/3*x_3*x_4 \\
&-4/81*x_4^2+1/54*x_0*x_5+1/8*x_1*x_5+2/3*x_2*x_5+4/81*x_3*x_5, \\
&x_2*x_3-x_1*x_4, \\
&x_3^2+1/648*x_1*x_4-95/96*x_2*x_4+1/18*x_3*x_4-235/1944*x_4^2 \\
&-1/648*x_0*x_5-1/96*x_1*x_5-1/18*x_2*x_5+235/1944*x_3*x_5, \\
&x_0*x_2+39/16*x_0*x_4-962/3*x_1*x_4-12*x_2*x_4+269/8*x_3*x_4 \\
&-1928/9*x_4^2-9/2*x_1*x_5-273/8*x_2*x_5-54*x_3*x_5-11*x_4*x_5 \\
&-27/4*x_5^2, \\
&x_1*x_2+27/4*x_0*x_4+48*x_1*x_4+8/3*x_2*x_4+9/2*x_3*x_4 \\
&+32*x_4^2+2/3*x_1*x_5+3/2*x_2*x_5+8*x_3*x_5+16/9*x_4*x_5+x_5^2, \\
&x_0*x_3+27/4*x_0*x_4+46655/972*x_1*x_4+479/144*x_2*x_4 \\
&+241/54*x_3*x_4+93547/2916*x_4^2+1/972*x_0*x_5+1/144*x_1*x_5 \\
&+83/54*x_2*x_5+23093/2916*x_3*x_5+16/9*x_4*x_5+x_5^2, \\
&x_2^2-x_0*x_4-2/3*x_3*x_4+2/3*x_2*x_5, \\
&x_0*x_1-64727/192*x_0*x_4-10934/81*x_1*x_4-179/12*x_2*x_4 \\
&-126935/288*x_3*x_4-21862/243*x_4^2+241/162*x_0*x_5+151/24*x_1*x_5 \\
&+45475/288*x_2*x_5-9007/486*x_3*x_5-133/12*x_4*x_5-39/16*x_5^2, \\
&x_1^2+39/16*x_0*x_4-2884/9*x_1*x_4-12*x_2*x_4+269/8*x_3*x_4 \\
&-5768/27*x_4^2-2/9*x_0*x_5-9/2*x_1*x_5-273/8*x_2*x_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1474/27*x_3*x_5-11*x_4*x_5-27/4*x_5^2, \\
& x_0^2+548367/256*x_0*x_4+47167031/2916*x_1*x_4+144271/216*x_2*x_4 \\
& +13997461/10368*x_3*x_4+23536741/2187*x_4^2-12397/5832*x_0*x_5 \\
& +149441/864*x_1*x_5+5849159/10368*x_2*x_5+47442073/17496*x_3*x_5 \\
& +257855/432*x_4*x_5+64727/192*x_5^2) \\
I(C_3) = & \\
\text{ideal} & (y_1^2-7700428585/70438653*y_0*y_2+99576448/7826517*y_1*y_2 \\
& +423784/869613*y_2^2+2450261843/41741424*y_0*y_3-299927/289871*y_1*y_3 \\
& -33475738/23479551*y_2*y_3+5896621/27827616*y_3^2, \\
& y_0*y_1-6630016/2608839*y_0*y_2+662464/289871*y_1*y_2-77856/289871*y_2^2 \\
& +8385441/1159484*y_0*y_3-357780/289871*y_1*y_3+9560/869613*y_2*y_3 \\
& +69021/2318968*y_3^2, \\
& y_0^2+558312/289871*y_0*y_2+14688/289871*y_1*y_2-13824/289871*y_2^2 \\
& -123015/579742*y_0*y_3-44226/289871*y_1*y_3+9144/289871*y_2*y_3 \\
& -153/579742*y_3^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi' = & \\
\{ & \{749748029657724*u^5-89028868933563318*u^4*v+36533411928926118*u^3*v^2 \\
& +15162234967501402/3*u^2*v^3+1017914625583752*u*v^4 \\
& -12177803976308706*u^4*z+10663746789555058/3*u^3*v*z \\
& +45193044217170827*u^2*v^2*z-36533411928926118*u*v^3*z \\
& +2520318283561064/3*v^4*z-133882608275539561*u^3*z^2 \\
& +60889019881543530*u^2*v*z^2+22452115623596702/3*u*v^2*z^2 \\
& +45871653967559995*v^3*z^2+5894184417020822*u^2*z^3 \\
& +134900522901123313*u*v*z^3-48711215905234824*v^2*z^3\}, \\
\{ & -644040631211526*u^5+1608043376069478*u^4*v-5829127707433464*u^3*v^2 \\
& -821346483497643*u^2*v^3-126304417902573*u*v^4+205399112148*v^5 \\
& +1943225146133064*u^4*z+466734778925409*u^3*v*z \\
& -888224633303121*u^2*v^2*z+5829538505657760*u*v^3*z \\
& +1038418178477112*v^4*z+2454166536738408*u^3*z^2 \\
& -9715372600587444*u^2*v*z^2+611449242245055*u*v^2*z^2 \\
& -972427578571503*v^3*z^2+217071694979469*u^2*z^3 \\
& -2580470954640981*u*v*z^3+7772352853566528*v^2*z^3\} \}
\end{aligned}$$

Die Parametrisierung  $\Psi$  ist beim Plot in Abschnitt 27 angegeben.

$$\begin{aligned}
8 \quad F = & u^5*v^5+21*u^5*v^4*z-36*u^4*v^5*z-19*u^5*v^3*z^2+12*u^4*v^4*z^2 \\
& +57*u^3*v^5*z^2+u^5*v^2*z^3+u^4*v^3*z^3-53*u^3*v^4*z^3 \\
& -19*u^2*v^5*z^3+u^5*v*z^4+43*u^3*v^3*z^4+u*v^5*z^4+u^5*z^5 \\
& -15*u^3*v^2*z^5+u^2*v^3*z^5+u*v^4*z^5+v^5*z^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_0, \dots, A_8\} = & \\
& \{ \{ u^3 v^* z^4 - 3 u^2 v^2 z^4 + 3 u v^3 z^4 - v^4 z^4, \\
& u^4 z^4 - 6 u^2 v^2 z^4 + 8 u v^3 z^4 - 3 v^4 z^4, \\
& u^3 v^2 z^3 - 2 u^2 v^3 z^3 + u v^4 z^3 - u^2 v^2 z^4 + 2 u v^3 z^4 - v^4 z^4, \\
& u^4 v z^3 - 3 u^2 v^3 z^3 + 2 u v^4 z^3 - 3 u^2 v^2 z^4 + 6 u v^3 z^4 - 3 v^4 z^4, \\
& u^3 v^3 z^2 - u^2 v^4 z^2 - 2 u^2 v^3 z^3 + 2 u v^4 z^3 + u v^3 z^4 - v^4 z^4, \\
& u^4 v^2 z^2 - u^2 v^4 z^2 - 4 u^2 v^3 z^3 + 4 u v^4 z^3 \\
& - u^2 v^2 z^4 + 4 u v^3 z^4 - 3 v^4 z^4, \\
& u^3 v^4 z - 3 u^2 v^4 z^2 + 3 u v^4 z^3 - v^4 z^4, \\
& u^4 v^3 z - 3 u^2 v^4 z^2 - 3 u^2 v^3 z^3 + 6 u v^4 z^3 + 2 u v^3 z^4 - 3 v^4 z^4, \\
& u^4 v^4 - 6 u^2 v^4 z^2 + 8 u v^4 z^3 - 3 v^4 z^4 \} \} \\
S = & \{ [ [0, 0, 1], 5, 10 ], [ [0, 1, 0], 5, 10 ], [ [-1, 0, 0], 5, 10 ], \\
& [ [1, 1, 1], 4, 6 ] \}
\end{aligned}$$

Heuristisch gefundener glatter rationaler Punkt mit Funktion *apkt* aus Abschnitt 30.3:

$$\text{ideal}(v+1/5z, u-z)$$

Birationale Transformation  $\Psi' : C \rightarrow \mathbb{P}_L^1$  berechnet mit der Funktion  $g_2^2$  aus Abschnitt 30.3 und dem glatten rationalen Punkt (Funktion  $g_1^1$ ):

$$\Psi' =$$

$$\begin{aligned}
& \{ \{ 73609866332 u^4 v^5 + 44301992936 u^5 v^3 z + 1407078762172 u^4 v^4 z \\
& - 2528305680520 u^3 v^5 z - 15197709840 u^5 v^2 z^2 - 1181244054936 u^4 v^3 z^2 \\
& + 754682476644 u^3 v^4 z^2 + 3896598217200 u^2 v^5 z^2 - 4040754056 u^5 v^* z^3 \\
& + 60992438280 u^4 v^2 z^3 - 27357436612 u^3 v^3 z^3 - 3577640233836 u^2 v^4 z^3 \\
& - 1091019911828 u v^5 z^3 - 3553167120 u^5 z^4 + 57172525288 u^4 v^* z^4 \\
& + 65746977168 u^3 v^2 z^4 + 2763991669704 u^2 v^3 z^4 - 27601623508 u v^4 z^4 \\
& - 2491002644 v^5 z^4 + 61379453880 u^4 z^5 - 7157495420 u^3 v^* z^5 \\
& - 944813742144 u^2 v^2 z^5 + 46015416044 u v^3 z^5 + 178853016816 v^4 z^5, \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 73609866332 u^5 v^4 - 176528877018 u^5 v^3 z + 3314188532406 u^4 v^4 z \\
& - 4962265859023 u^3 v^5 z + 54918119194 u^5 v^2 z^2 - 2738618566501 u^4 v^3 z^2 \\
& + 1883532702041 u^3 v^4 z^2 + 7227096621951 u^2 v^5 z^2 - 16389279924 u^5 v^* z^3 \\
& + 12186326944 u^4 v^2 z^3 + 592650267967 u^3 v^3 z^3 - 7456097631534 u^2 v^4 z^3 \\
& - 2201597755018 u v^5 z^3 + 11251496412 u^5 z^4 + 108442928977 u^4 v^* z^4 \\
& - 353087643239 u^3 v^2 z^4 + 6080335197964 u^2 v^3 z^4 - 917568420254 u v^4 z^4 \\
& + 858711436095 v^5 z^4 + 147023025006 u^4 z^5 + 40106504982 u^3 v^* z^5 \\
& - 1982088837517 u^2 v^2 z^5 + 670671943052 u v^3 z^5 - 270482099295 v^4 z^5 \} \}
\end{aligned}$$

$$\Psi =$$

$$\{ \{ -330818011053087358748189697238931166478161631897073224514817981328617$$

201675046306647040\*y<sub>0</sub><sup>10</sup>-1733175367190865356366540138459531840899070998  
9142173639365077304610330297627878249472\*y<sub>0</sub><sup>9</sup>\*y<sub>1</sub>-183373676891333641562  
6212648454620845507329087721649108692175706737041601345546742528\*y<sub>0</sub><sup>8</sup>\*y<sub>1</sub><sup>2</sup>  
-57690467985621015226118201975934171558209110653430635335079367046580476  
833563683328\*y<sub>0</sub><sup>7</sup>\*y<sub>1</sub><sup>3</sup>-16827614154429558502850832637320907240555138873  
58347851694452461781751219890713024\*y<sub>0</sub><sup>6</sup>\*y<sub>1</sub><sup>4</sup>+402057289455606914990253  
9059798701315860613392682091825879851974249123964760800\*y<sub>0</sub><sup>5</sup>\*y<sub>1</sub><sup>5</sup>+1955  
860894056656362466690932519862843415573983646734007838352690370078098613  
040\*y<sub>0</sub><sup>4</sup>\*y<sub>1</sub><sup>6</sup>+33083810181971649334520664626829458518854418482092614626  
230604850938484170448\*y<sub>0</sub><sup>3</sup>\*y<sub>1</sub><sup>7</sup>+38269658394694714124241998073099556797  
150287991359497056611795092054744648\*y<sub>0</sub><sup>2</sup>\*y<sub>1</sub><sup>8</sup>-17234850912561909725438  
21335814304703731953552051732036344912017908208902\*y<sub>0</sub>\*y<sub>1</sub><sup>9</sup>-47482275179  
53142749023632388675783671194056569379274613642378442308531\*y<sub>1</sub><sup>10</sup>},

{55984965096017519939720883829043523466177661519026288914938952424688175  
4525471850224640\*y<sub>0</sub><sup>10</sup>+671155766227842642017486196240664910741190469283  
83648080030453741395220117957134308352\*y<sub>0</sub><sup>9</sup>\*y<sub>1</sub>+58591467057408859528308  
68929040614894395662069253493383587194896242613342109133902848\*y<sub>0</sub><sup>8</sup>\*y<sub>1</sub><sup>2</sup>  
+34098365300488357199784979169927245440151099384291434213815622731925371  
7098695998080\*y<sub>0</sub><sup>7</sup>\*y<sub>1</sub><sup>3</sup>+1445339390248221441322840588399045019410667964  
3946930577458294825439138352817819968\*y<sub>0</sub><sup>6</sup>\*y<sub>1</sub><sup>4</sup>+3876235105119868733478  
28220121103974868079720122983247659383094970687646987689856\*y<sub>0</sub><sup>5</sup>\*y<sub>1</sub><sup>5</sup>  
+54414195978038260433404287991470145928335373274157971251455705001280441  
97002752\*y<sub>0</sub><sup>4</sup>\*y<sub>1</sub><sup>6</sup>+260061106854683214910369621795792899176506013884869  
70812671712230567525039200\*y<sub>0</sub><sup>3</sup>\*y<sub>1</sub><sup>7</sup>-179794759572259131056810108598141  
527692755992129064674146127347427075869412\*y<sub>0</sub><sup>2</sup>\*y<sub>1</sub><sup>8</sup>-21650564089657938  
23729934423087108004541394511975565497852656540319949218\*y<sub>0</sub>\*y<sub>1</sub><sup>9</sup>-46466  
67476911169613199364080543683061746837965482541077650147388100180\*y<sub>1</sub><sup>10</sup>},  
{14176440042918449511257550614012024971796250371844989406714430635857490  
67913666675201024\*y<sub>0</sub><sup>10</sup>+15357342056612256370530024749324350643930622869  
8446366457567099360983706924534852038656\*y<sub>0</sub><sup>9</sup>\*y<sub>1</sub>+106391788287016197192  
06637277399293682217054217409825865244787236500071450448544028416\*y<sub>0</sub><sup>8</sup>\*y<sub>1</sub><sup>2</sup>  
+37837373350421644599197306186785613907802567345327463390252384149307469  
1088579572096\*y<sub>0</sub><sup>7</sup>\*y<sub>1</sub><sup>3</sup>+6893964807394138358593154896229497625983918069  
569949829090155285312977805096312640\*y<sub>0</sub><sup>6</sup>\*y<sub>1</sub><sup>4</sup>-11242012988852548547653  
1968966969777889788962132514207158943444885984958907020096\*y<sub>0</sub><sup>5</sup>\*y<sub>1</sub><sup>5</sup>  
-79872150047417185049188720431084020517072457252386052179325177693404767  
70683072\*y<sub>0</sub><sup>4</sup>\*y<sub>1</sub><sup>6</sup>-143902999327380913826836456196512323206773803181733

$$\begin{aligned}
& 930770915690519370197944384*y_0^3*y_1^7-11289567706528580152862239102738 \\
& 13436963221242661523228800639422576705248192*y_0^2*y_1^8-372347586875579 \\
& 5228964185449080802643848848954267904829528879581435145502*y_0*y_1^9 \\
& -4279075037324152177053699805429601115938261881719248063212389207806620*y_1^{10}\}
\end{aligned}$$

$$9. F = u^4-14*u^2*v^2+v^4+8*u^2*v*z+8*v^3*z$$

$$\{A_0, \dots, A_2\} = \{v^2, u*v, u^2\}$$

$$S = \{[0, 0, 1], 3, 3\}$$

$$\Phi_2 = \Psi' = \{v^2, u*v, u^2\}$$

$$I(C_2) = \text{ideal}(x_1^2-x_0*x_2)$$

$$\Psi'' =$$

$$\{-8*y_0*y_1-8*y_1*y_2, \{-8*y_0^2-8*y_0*y_2, \{y_0^2-14*y_0*y_2+y_2^2\}\}$$

$$P = (0 : 0 : 1)$$

$$\varphi = \{r_0^2, r_0*r_1, r_1^2\}$$

$$\Psi =$$

$$\{-8*r_0^3*r_1-8*r_0*r_1^3,$$

$$\{-8*r_0^4-8*r_0^2*r_1^2,$$

$$\{r_0^4-14*r_0^2*r_1^2+r_1^4\}$$

$$10. F = 14440*u^5-16227*u^4*v+10812*u^3*v^2-13533*u^2*v^3+3610*u*v^4$$

$$+1805*v^5+14440*u^4*z-18032*u^3*v*z+16218*u^2*v^2*z-12626*u*v^3*z$$

$$+3610*v^4*z+3610*u^3*z^2-4508*u^2*v*z^2+5406*u*v^2*z^2-2703*v^3*z^2$$

$$\{A_0, \dots, A_3\} =$$

$$\{v^3-1/3*u^2*z-2/3*u*v*z-2/3*v^2*z, u*v^2-2/3*u^2*z-1/3*u*v*z-1/3*v^2*z,$$

$$u^2*v-1/3*u^2*z+1/3*u*v*z-2/3*v^2*z, u^3+1/3*u^2*z-1/3*u*v*z-1/3*v^2*z\}$$

$$S = \{[0, 0, 1], 3, 3\},$$

$$[[\text{RootOf}(3*Z^3+Z^2-2*Z-1), -1+3*\text{RootOf}(3*Z^3+Z^2-2*Z-1)^2, 1], 2, 1]\}$$

$$I(C_3) =$$

$$\text{ideal}(x_1^2-x_0*x_2-2*x_1*x_2+x_2^2+2*x_0*x_3-x_1*x_3,$$

$$x_0^2-20753/1805*x_0*x_2+14422/1805*x_1*x_2-17116/1805*x_2^2$$

$$+23456/1805*x_0*x_3-4147/361*x_1*x_3+46894/1805*x_2*x_3-16*x_3^2,$$

$$x_0*x_1+2*x_0*x_2-4508/1805*x_1*x_2+5406/1805*x_2^2-5*x_0*x_3$$

$$+5406/1805*x_1*x_3-16227/1805*x_2*x_3+8*x_3^2)$$

$$\Phi_3 =$$

$$\{x_2-2*x_3, \{x_1+2*x_2-5*x_3\}\}$$

$$\Psi' =$$

$$\{-2*u^3+u^2*v-u^2*z+u*v*z, \{-5*u^3+2*u^2*v+u*v^2-3*u^2*z+2*u*v*z\}\}$$

$$\Psi =$$

$$\{90617653125*y_0^5-314809934375*y_0^4*y_1+91155060000*y_0^3*y_1^2$$

$$\begin{aligned}
& -47569461750*y_0^2*y_1^3+993508375*y_0*y_1^4-2402967*y_1^5\}, \\
& \{732243375000*y_0^5-324990250000*y_0^4*y_1+158585043750*y_0^3*y_1^2 \\
& -25217203750*y_0^2*y_1^3+1219728750*y_0*y_1^4-3209290*y_1^5\}, \\
& \{1222571625000*y_0^5-397273846875*y_0^4*y_1+118712188750*y_0^3*y_1^2 \\
& +72770440750*y_0^2*y_1^3-1865652050*y_0*y_1^4+3983285*y_1^5\}
\end{aligned}$$

Man kann nun noch den zweiten Teil der Optimierung aus Abschnitt 18 anwenden. Dabei wird bei

$$\begin{aligned}
& \{732243375000*y_0^5-324990250000*y_0^4*y_1+158585043750*y_0^3*y_1^2 \\
& -25217203750*y_0^2*y_1^3+1219728750*y_0*y_1^4-3209290*y_1^5\}
\end{aligned}$$

ein Linearfaktor  $(-10*y_0+y_1)$  ausgeklammert und dann  $y_1 \rightarrow y_1+10*y_0$  substituiert. Dieser Schritt ist noch nicht implementiert, da der Faktorisierungsalgorithmus in Macaulay 2 noch nicht den nötigen Funktionsumfang und die nötige Leistungsfähigkeit hat. Es wurde statt dessen Mathematica verwendet. Anschließend wird nochmals der erste Schritt der Optimierung aus Abschnitt 18 durchgeführt. Damit erhält man eine weiter optimierte Parametrisierung:

$$\begin{aligned}
& \{-25*y_0^5-3325*y_0^4*y_1-135420*y_0^3*y_1^2-861650*y_0^2*y_1^3 \\
& +34934401*y_0*y_1^4-45656373*y_1^5\}, \\
& \{3610*y_1^2*(5*y_0^3+475*y_0^2*y_1+11737*y_0*y_1^2-16891*y_1^3)\}, \\
& \{50*y_0^5+6175*y_0^4*y_1+216690*y_0^3*y_1^2+179170*y_0^2*y_1^3 \\
& -66659512*y_0*y_1^4+75682415*y_1^5\}
\end{aligned}$$

11.  $F = -24135/322*u^6-532037/6440*u^5*v+139459/560*u^4*v^2$   
 $-1464887/12880*u^3*v^3+72187/25760*u^2*v^4+9/8*u*v^5$   
 $+1/8*v^6-403511/3220*u^5*z-40817/920*u^4*v*z+10059/80$   
 $*u^3*v^2*z-35445/1288*u^2*v^3*z+19/4*u*v^4*z+3/4*v^5*z$   
 $-20743/805*u^4*z^2+126379/3220*u^3*v*z^2-423417/6440$   
 $*u^2*v^2*z^2+11/2*u*v^3*z^2+3/2*v^4*z^2+3443/140*u^3*z^3$   
 $+u^2*v*z^3+u*v^2*z^3+v^3*z^3$   
 $\{A_0, \dots, A_4\} =$   
 $\{-23/36*u^4-73/72*u^3*v+23/48*u^2*v^2+121/288*u*v^3$   
 $+1/288*v^4-23/18*u^3*z-25/18*u^2*v*z+47/72*u*v^2*z$   
 $+1/72*v^3*z-23/36*u^2*z^2-3/8*u*v*z^2+1/72*v^2*z^2,$   
 $-25/36*u^4-23/72*u^3*v+1/48*u^2*v^2+47/288*u*v^3+23/288*v^4$   
 $-25/18*u^3*z-17/18*u^2*v*z+1/72*u*v^2*z+23/72*v^3*z$   
 $-25/36*u^2*z^2-5/8*u*v*z^2+23/72*v^2*z^2,$   
 $1/36*u^4-61/72*u^3*v-13/48*u^2*v^2+73/288*u*v^3+25/288*v^4$   
 $-17/18*u^3*z-31/18*u^2*v*z+23/72*u*v^2*z+25/72*v^3*z$   
 $-35/36*u^2*z^2-3/8*u*v*z^2+25/72*v^2*z^2,$   
 $-377/432*u^4-1159/864*u^3*v+377/576*u^2*v^2+775/3456*u*v^3$

$+295/3456*v^4-377/216*u^3*z-391/216*u^2*v*z+185/864*u*v^2*z$   
 $+295/864*v^3*z-377/432*u^2*z^2-15/32*u*v*z^2+295/864*v^2*z^2,$   
 $-391/432*u^4-377/864*u^3*v-185/576*u^2*v^2+1049/3456*u*v^3$   
 $+377/3456*v^4-391/216*u^3*z-425/216*u^2*v*z+295/864*u*v^2*z$   
 $+377/864*v^3*z-391/432*u^2*z^2-17/32*u*v*z^2+377/864*v^2*z^2\}$

$S =$   
 $[[0, -2, 1], 3, 3], [[0, 0, 1], 3, 3], [[1, 2, 1], 2, 1],$   
 $[[2/7, -2/7, 1], 2, 1], [[-2, -2, 1], 2, 1], [[-1, 0, 1], 2, 1]$

$I(C_4) =$   
 $\text{ideal}(x_0*x_2+149/41*x_0*x_3-29/41*x_1*x_3+38/41*x_0*x_4+27/41*x_1*x_4,$   
 $x_1*x_2+12/41*x_0*x_3-149/41*x_1*x_3+191/41*x_0*x_4+3/41*x_1*x_4,$   
 $x_2^2-13*x_3^2+x_2*x_4-3*x_4^2,$   
 $x_0*x_1+70/1681*x_2*x_3+286/1681*x_3^2-149/1681*x_2*x_4$   
 $+35/1681*x_3*x_4-3/1681*x_4^2,$   
 $x_1^2+764/1681*x_2*x_3+2756/1681*x_3^2-12/1681*x_2*x_4$   
 $+382/1681*x_3*x_4+683/1681*x_4^2, x_0^2-108/1681*x_2*x_3$   
 $+442/1681*x_3^2-29/1681*x_2*x_4-54/1681*x_3*x_4+96/1681*x_4^2)$

$I(C_2) =$   
 $\text{ideal}(y_0^2+1432801/568141*y_0*y_1-48806/568141*y_1^2$   
 $-111119562684/182111347999*y_0*y_2+20623467408/182111347999*y_1*y_2$   
 $+41120938700/182111347999*y_2^2\}$

$\Phi_4 =$   
 $\{x_0-1041027025320816845747251/694611886093576145734000*x_3$   
 $+92255327403318536601289/138922377218715229146800*x_4\},$   
 $\{-11658633354427258926641119/7988036690076125675941000*x_1$   
 $-165343174228758117732828349/15976073380152251351882000*x_2$   
 $+671116235079277421893041/840845967376434281678000*x_3$   
 $+139789837524831178736634039/15976073380152251351882000*x_4\},$   
 $\{-165343174228758117732828349/15976073380152251351882000*x_1$   
 $+3301109116857336765317283/15976073380152251351882000*x_2$   
 $+31845825272970088628938081/3994018345038062837970500*x_3$   
 $+1008004614137781426211633/3994018345038062837970500*x_4\}$

$P =$   
 $(-91619296258633579536203539418755410718175810873644879087$   
 $37240958151166025194,$   
 $-356401360300265512900199672440235266131300762416502646199$   
 $055507516592986331901,$   
 $20894753621058941228118226265474165408657379578183066198688$

3027223304649478008)

Gemäß Abschnitt 15 bekommt man eine Parametrisierung der Konik mit der Funktion *conicpar* aus Abschnitt 30.1.4:

$\varphi =$

```
{ {819015535910524080406478298948190190094658803208248808374
0766953201377466424459339300*r_0^2-410762515289962166560710
75027324901671085928451447547174446210290494187925605514321
12*r_0*r_1-311589786172563640369634102473750954725611509723
6651850755228794733390419549188799526*r_1^2,
31859909759790938586289499887336943026442184353461454745085
1076575808900517479105988450*r_0^2-395702331944149458658980
27949757320266777089883027403359166439676031248085009877692
3476*r_0*r_1+1234143411905747373146730561856669815616987236
57783903560852420726961851049481081448042*r_1^2,
49129491371300145347519529771129753516864527706072492926990
190104414737906022609308428*r_0^2-1509447950797482448251303
25618273715819869497886200683548606054663400318741393344946
037*r_0*r_1+71061360202279892920212952047722617397870910879
605063894932922081581830830412109897032*r_1^2} }
```

Die Parametrisierung von  $C$  würde zu viel Platz einnehmen.

Man sieht, daß es zur Berechnung von Parametrisierungen möglichst kleiner Höhe wichtig ist, auf der Konik einen Punkt möglichst kleiner Höhe zu finden.

Alternativ:

Heuristisch gefundener glatter rationaler Punkt auf  $C$  mit Funktion *apkt* aus Abschnitt 30.3:

```
ideal (v-142258996587985/356403926667878*z,
u+47323279747541/712807853335756*z)
```

Die birationale Transformation  $\Psi' : C \rightarrow \mathbb{P}_L^1$  wurde berechnet ausgehend von der Funktion  $g_2^2$  aus Abschnitt 30.3 und dem glatten rationalen Punkt aus Funktion *apkt* (unter Verwendung von Funktion  $g_1^1$ ). Die Parametrisierung ist bei dem Plot in Abschnitt 27 angegeben.

12.  $F = u^9 + u^7 v^2 - u^6 v^3 - 6 u^5 v^4 + 3 u^4 v^5 + 4 u^3 v^6 - 3 u^2 v^7 - u v^8 + v^9 + 4 u^8 z - u^7 v z + 5 u^6 v^2 z + 9 u^5 v^3 z - 21 u^4 v^4 z - 6 u^3 v^5 z + 16 u^2 v^6 z + u v^7 z - 5 v^8 z + 6 u^7 z^2 - 4 u^6 v z^2 + 3 u^5 v^2 z^2 + 30 u^4 v^3 z^2 - 12 u^3 v^4 z^2 - 27 u^2 v^5 z^2 + 6 u v^6 z^2 + 10 v^7 z^2 + 4 u^6 z^3 - 6 u^5 v z^3 - 8 u^4 v^2 z^3 + 25 u^3 v^3 z^3 + 15 u^2 v^4 z^3 - 14 u v^5 z^3 - 10 v^6 z^3 + u^5 z^4 - 4 u^4 v z^4 - 10 u^3 v^2 z^4 + 2 u^2 v^3 z^4 + 11 u v^4 z^4 + 5 v^5 z^4$

$$\begin{aligned}
& -u^3*v*z^5-3*u^2*v^2*z^5-3*u*v^3*z^5-v^4*z^5 \\
\{A_0, \dots, A_7\} = & \\
& \{v^7-4*v^6*z+6*v^5*z^2-4*v^4*z^3+v^3*z^4, \\
& u*v^6-3*u*v^5*z+3*u*v^4*z^2-u*v^3*z^3, \\
& u^2*v^5-3*u^2*v^4*z+u*v^5*z+3*u^2*v^3*z^2-3*u*v^4*z^2 \\
& -u^2*v^2*z^3+3*u*v^3*z^3-u*v^2*z^4, \\
& u^3*v^4-2*u^3*v^3*z+u^2*v^4*z+u^3*v^2*z^2-2*u^2*v^3*z^2 \\
& +u^2*v^2*z^3, \\
& u^4*v^3-2*u^4*v^2*z+2*u^3*v^3*z+u^4*v*z^2-4*u^3*v^2*z^2 \\
& +u^2*v^3*z^2+2*u^3*v*z^3-2*u^2*v^2*z^3+u^2*v*z^4, \\
& u^5*v^2-u^5*v*z+2*u^4*v^2*z-2*u^4*v*z^2+u^3*v^2*z^2-u^3*v*z^3, \\
& u^6*v-u^6*z+3*u^5*v*z-3*u^5*z^2+3*u^4*v*z^2-3*u^4*z^3+u^3*v*z^3-u^3*z^4, \\
& u^7+3*u^6*z+3*u^5*z^2+u^4*z^3\} \\
S = & \\
& [[-1, 1, 1], 4, 6], [[-1, 0, 1], 4, 6], [[0, 0, 1], 4, 6], \\
& [[0, 1, 1], 5, 10] \\
I(C_7) = & \\
& \text{ideal}(x_1*x_6-x_0*x_7, x_3*x_6-x_2*x_7, x_5*x_6-x_4*x_7, \\
& x_2*x_5-x_0*x_7, x_3*x_5-x_1*x_7, x_4*x_5-x_2*x_7, x_5^2-x_3*x_7, \\
& x_0*x_4-x_1*x_5-3*x_0*x_6+3*x_2*x_6-x_4*x_6+x_0*x_7+4*x_1*x_7 \\
& -3*x_2*x_7-6*x_3*x_7+x_5*x_7+x_6*x_7+x_7^2, \\
& x_1*x_4-x_1*x_5-3*x_0*x_7+4*x_1*x_7+3*x_2*x_7-6*x_3*x_7-x_4*x_7 \\
& +x_5*x_7+x_7^2, \\
& x_0*x_5-x_1*x_5-3*x_0*x_7+4*x_1*x_7+3*x_2*x_7-6*x_3*x_7-x_4*x_7 \\
& +x_5*x_7+x_7^2, x_2*x_4-x_0*x_6, x_3*x_4-x_0*x_7, x_4^2-x_2*x_6, \\
& x_0*x_3-x_1*x_3+x_1*x_5-6*x_0*x_7+6*x_1*x_7+8*x_2*x_7-17*x_3*x_7 \\
& -3*x_4*x_7+4*x_5*x_7+3*x_7^2, \\
& x_2*x_3-x_1*x_5-3*x_0*x_7+4*x_1*x_7+3*x_2*x_7-6*x_3*x_7-x_4*x_7 \\
& +x_5*x_7+x_7^2, \\
& x_3^2-x_1*x_5, \\
& x_0*x_2-x_1*x_3+2*x_1*x_5-6*x_0*x_6+8*x_2*x_6-3*x_4*x_6+3*x_0*x_7 \\
& +2*x_1*x_7-12*x_2*x_7-11*x_3*x_7+2*x_4*x_7+3*x_5*x_7+3*x_6*x_7+2*x_7^2, \\
& x_1*x_2-x_1*x_3+x_1*x_5-6*x_0*x_7+6*x_1*x_7+8*x_2*x_7-17*x_3*x_7 \\
& -3*x_4*x_7+4*x_5*x_7+3*x_7^2, \\
& x_2^2-x_1*x_5-3*x_0*x_6+3*x_2*x_6-x_4*x_6+x_0*x_7+4*x_1*x_7-3*x_2*x_7 \\
& -6*x_3*x_7+x_5*x_7+x_6*x_7+x_7^2, \\
& x_0*x_1-x_1^2+x_1*x_3-10*x_0*x_7+7*x_1*x_7+15*x_2*x_7-32*x_3*x_7 \\
& -6*x_4*x_7+9*x_5*x_7+6*x_7^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_0^2 - x_1^2 + 2x_1x_3 - x_1x_5 - 10x_0x_6 + 15x_2x_6 - 6x_4x_6 \\
& + 3x_0x_7 + x_1x_7 - 25x_2x_7 - 15x_3x_7 + 6x_4x_7 + 5x_5x_7 \\
& + 6x_6x_7 + 3x_7^2) \\
I(C_5) = & \text{ideal}(y_3y_4 - y_2y_5, y_1y_4 - y_0y_5, y_3^2 - y_1y_5, y_2y_3 - y_0y_5, \\
& y_1y_3 - 6y_0y_5 - 3y_1y_5 + 4y_2y_5 + 3y_3y_5 - y_4y_5 - y_5^2, \\
& y_0y_3 - 6y_0y_4 + 4y_2y_4 - y_4^2 - 3y_0y_5 + 3y_2y_5 - y_4y_5, \\
& y_2^2 - y_0y_4, \\
& y_1y_2 - 6y_0y_4 + 4y_2y_4 - y_4^2 - 3y_0y_5 + 3y_2y_5 - y_4y_5, \\
& y_1^2 - 36y_0y_4 + 24y_2y_4 - 6y_4^2 - 32y_0y_5 - 6y_1y_5 + 29y_2y_5 \\
& + 8y_3y_5 - 9y_4y_5 - 3y_5^2, \\
& y_0y_1 - 6y_0y_2 - 14y_0y_4 + 11y_2y_4 - 3y_4^2 - 6y_0y_5 \\
& + 8y_2y_5 - 3y_4y_5) \\
I(C_3) = & \text{ideal}(y_1^2 - 43/3y_0y_3 - 11/3y_1y_3 - 3y_2y_3, \\
& y_0y_1 - 1/3y_0y_3 + 1/3y_1y_3, \\
& y_0^2 + 9/43y_0y_2 + 53/129y_0y_3 + 1/129y_1y_3 + 3/43y_2y_3) \\
\Psi' = & \{ \{-7052u^7 - 20640u^5v^2 + 19737u^4v^3 + 49923u^3v^4 - 49923u^2v^5 \\
& - 21156u^6z + 20640u^5vz - 80754u^4v^2z - 60372u^3v^3z \\
& + 199692u^2v^4z - 49923uv^5z - 21156u^5z^2 + 61017u^4vz^2 \\
& - 49665u^3v^2z^2 - 229878u^2v^3z^2 + 149769uv^4z^2 \\
& - 7052u^4z^3 + 60114u^3vz^3 + 60372u^2v^2z^3 - 149769uv^3z^3 \\
& + 19737u^2vz^4 + 49923uv^2z^4\}, \\
& \{164u^7 - 12u^5v^2 - 459u^4v^3 - 2601u^3v^4 + 2538u^2v^5 + 3483uv^6 \\
& - 3483v^7 + 492u^6z + 12u^5vz + 894u^4v^2z + 4284u^3v^3z \\
& - 10215u^2v^4z - 7911uv^5z + 13932v^6z + 492u^5z^2 - 435u^4vz^2 \\
& - 777u^3v^2z^2 + 12357u^2v^3z^2 + 2835uv^4z^2 - 20898v^5z^2 \\
& + 164u^4z^3 - 906u^3vz^3 - 4221u^2v^2z^3 + 4131uv^3z^3 \\
& + 13932v^4z^3 - 459u^2vz^4 - 2538uv^2z^4 - 3483v^3z^4\} \} \\
\Psi = & \{ \{-y_0^8y_1 - 22y_0^7y_1^2 - 203y_0^6y_1^3 - 1038y_0^5y_1^4 \\
& - 3238y_0^4y_1^5 - 6335y_0^3y_1^6 - 7610y_0^2y_1^7 - 5140y_0y_1^8 \\
& - 1496y_1^9\}, \\
& \{y_0^7y_1^2 + 18y_0^6y_1^3 + 135y_0^5y_1^4 + 549y_0^4y_1^5 \\
& + 1311y_0^3y_1^6 + 1842y_0^2y_1^7 + 1412y_0y_1^8 + 456y_1^9\}, \\
& \{y_0^9 + 29y_0^8y_1 + 361y_0^7y_1^2 + 2536y_0^6y_1^3 \\
& + 11109y_0^5y_1^4 + 31543y_0^4y_1^5 + 58155y_0^3y_1^6 \\
& + 67207y_0^2y_1^7 + 44203y_0y_1^8 + 12611y_1^9\} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \quad F &= 1251*v^4*z^3+5184*u*v^3*z^3+5354*u^2*v^2*z^3+115*u^4*z^3 \\
&-9552*u*v^4*z^2-22496*u^2*v^3*z^2-5424*u^3*v^2*z^2 \\
&-160*u^4*v*z^2+22080*u^2*v^4*z+17472*u^3*v^3*z \\
&-13824*u^3*v^4 \\
\{A_0, \dots, A_5\} &= \\
&\{\{u^3*z^2-3*u^2*v*z^2-u*v^2*z^2+3*v^3*z^2, \\
&u*v^3*z+5/48*u^2*v*z^2-2/3*u*v^2*z^2-7/16*v^3*z^2, \\
&u^2*v^2*z-17/48*u^2*v*z^2-1/3*u*v^2*z^2-5/16*v^3*z^2, \\
&u^3*v*z-67/48*u^2*v*z^2-2/3*u*v^2*z^2+17/16*v^3*z^2, \\
&u^2*v^3-13/288*u^2*v*z^2-4/9*u*v^2*z^2-49/96*v^3*z^2, \\
&u^3*v^2-167/288*u^2*v*z^2-5/9*u*v^2*z^2+13/96*v^3*z^2\}\} \\
S &= \\
&[[-1/3, 1/3, 1], 2, 1], [[3/2, 1/2, 1], 2, 1], [[0, 0, 1], 4, 6], \\
&[[-1, 0, 0], 3, 3], [[0, 1, 0], 3, 3], [[1, 1, 1], 2, 1] \\
I(C_5) &= \\
&\text{ideal}(x_0*x_3-105622/1495*x_0*x_4+250944/575*x_1*x_4 \\
&-3124704/7475*x_2*x_4-18432/299*x_3*x_4-235008/575*x_4^2 \\
&-32/23*x_0*x_5+1216992/1495*x_1*x_5+319296/1495*x_2*x_5 \\
&-13824/115*x_4*x_5, \\
&x_1*x_3-614997/1951040*x_0*x_4+42029/13400*x_1*x_4 \\
&+17220939/2438800*x_2*x_4+208797/97552*x_3*x_4-38547/11725*x_4^2 \\
&-2251729/487760*x_1*x_5-208797/97552*x_2*x_5, \\
&x_2*x_3-1622811/1951040*x_0*x_4+95227/13400*x_1*x_4 \\
&-52964643/2438800*x_2*x_4-746757/97552*x_3*x_4-61461/11725*x_4^2 \\
&+11623033/487760*x_1*x_5+746757/97552*x_2*x_5, \\
&x_3^2+19122667/1951040*x_0*x_4+418301/13400*x_1*x_4 \\
&-171728709/2438800*x_2*x_4-6078483/97552*x_3*x_4 \\
&-299043/11725*x_4^2-x_0*x_5+42010079/487760*x_1*x_5 \\
&+6078483/97552*x_2*x_5, \\
&x_0*x_2-102/13*x_0*x_4+288/13*x_3*x_4-288/13*x_2*x_5, \\
&x_1*x_2+152421/1951040*x_0*x_4-30197/13400*x_1*x_4 \\
&-1987827/2438800*x_2*x_4+28299/97552*x_3*x_4+25371/11725*x_4^2 \\
&-729623/487760*x_1*x_5-28299/97552*x_2*x_5, \\
&x_2^2-614997/1951040*x_0*x_4+42029/13400*x_1*x_4 \\
&-1914261/2438800*x_2*x_4-16323/97552*x_3*x_4-38547/11725*x_4^2 \\
&+1575311/487760*x_1*x_5+16323/97552*x_2*x_5, \\
&x_0*x_1+30/13*x_0*x_4+288/13*x_2*x_4-288/13*x_1*x_5, \\
&x_1^2-23253/1951040*x_0*x_4+221/13400*x_1*x_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+1195611/2438800*x_2*x_4-13107/97552*x_3*x_4-9603/11725*x_4^2 \\
&+234239/487760*x_1*x_5+13107/97552*x_2*x_5, \\
&x_0^2-319168/6877*x_0*x_4-1933824/2645*x_1*x_4 \\
&+67693056/34385*x_2*x_4+36688896/34385*x_3*x_4+1548288/2645*x_4^2 \\
&-1024/529*x_0*x_5-14489088/6877*x_1*x_5-6710784/6877*x_2*x_5 \\
&-442368/2645*x_4*x_5)
\end{aligned}$$

$$I(C_3) =$$

$$\begin{aligned}
&\text{ideal}(y_1^2+720384/4369*y_0*y_2-86/15*y_1*y_2+167/15*y_2^2 \\
&-20651008/21845*y_0*y_3-50233562/1638375*y_1*y_3 \\
&+31789878/546125*y_2*y_3-190597313/1638375*y_3^2, \\
&y_0*y_1-9433/4369*y_0*y_2+5441/4369*y_0*y_3-7751/87380*y_1*y_3 \\
&+50807/87380*y_2*y_3-204999/87380*y_3^2, \\
&y_0^2+4345/209712*y_0*y_2-805/104856*y_0*y_3-2645/1118464*y_1*y_3 \\
&+22195/3355392*y_2*y_3+229057/3355392*y_3^2)
\end{aligned}$$

$$\Psi' =$$

$$\begin{aligned}
&\{-135774287953920*u^3*v^2-1605476044505088*u^2*v^3 \\
&+10720697057280*u^3*v*z-29004019924992*u^2*v^2*z \\
&-243442027659264*u*v^3*z+121149040459776*u^2*v*z^2 \\
&+953790629019648*u*v^2*z^2+928036013506560*v^3*z^2\}, \\
&\{397651968000*u^3*v^2+2259700531200*u^2*v^3 \\
&-285812352000*u^3*v*z-622988083200*u^2*v^2*z \\
&-11078101171200*u*v^3*z-866964134400*u^2*v*z^2 \\
&+6558375936000*u*v^2*z^2+3638137305600*v^3*z^2\}
\end{aligned}$$

$$\Psi =$$

$$\begin{aligned}
&\{3375*y_0^7+126225*y_0^6*y_1+1919835*y_0^5*y_1^2 \\
&+14942965*y_0^4*y_1^3+63449389*y_0^3*y_1^4+149578803 \\
&*y_0^2*y_1^5+185135625*y_0*y_1^6+94314375*y_1^7\}, \\
&\{-64*y_0*y_1^2*(225*y_0^4+5520*y_0^3*y_1+47050*y_0^2*y_1^2 \\
&+137448*y_0*y_1^3+139725*y_1^4)\}, \\
&\{-18432*y_0*y_1^3*(15*y_0^3+193*y_0^2*y_1+661*y_0*y_1^2+675*y_1^3)\}
\end{aligned}$$

$$16. F =$$

$$\begin{aligned}
&2*u^7+u^6*v+3*u^5*v^2+u^4*v^3+2*u^3*v^4+u^2*v^5+2*u*v^6 \\
&+v^7-7780247/995328*u^6*z-78641/9216*u^5*v*z \\
&-10892131/995328*u^4*v^2*z-329821/31104*u^3*v^3*z \\
&-953807/331776*u^2*v^4*z-712429/248832*u*v^5*z \\
&+1537741/331776*v^6*z+2340431/248832*u^5*z^2 \\
&+5154337/248832*u^4*v*z^2+658981/41472*u^3*v^2*z^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+1737757/124416*u^2*v^3*z^2-1234733/248832*u*v^4*z^2 \\
&-1328329/82944*v^5*z^2-818747/248832*u^4*z^3 \\
&-1822879/124416*u^3*v*z^3-415337/31104*u^2*v^2*z^3 \\
&+1002655/124416*u*v^3*z^3+849025/82944*v^4*z^3 \\
\{A_0, \dots, A_5\} = \\
&\{ \{v^5+343/6912*u^4*z-637/3456*u^3*v*z+301/864*u^2*v^2*z \\
&-1667/3456*u*v^3*z-3989/2304*v^4*z-91/3456*u^3*z^2 \\
&-145/1152*u^2*v*z^2+1627/3456*u*v^2*z^2+785/1152*v^3*z^2, \\
&u*v^4+245/6912*u^4*z+49/3456*u^3*v*z-163/864*u^2*v^2*z \\
&-4657/3456*u*v^3*z-1183/2304*v^4*z-281/3456*u^3*z^2 \\
&+85/1152*u^2*v*z^2+2201/3456*u*v^2*z^2+427/1152*v^3*z^2, \\
&u^2*v^3+175/6912*u^4*z+395/3456*u^3*v*z-1127/864*u^2*v^2*z \\
&-2699/3456*u*v^3*z-125/2304*v^4*z-355/3456*u^3*z^2 \\
&+407/1152*u^2*v*z^2+1891/3456*u*v^2*z^2+233/1152*v^3*z^2, \\
&u^3*v^2+125/6912*u^4*z-2423/3456*u^3*v*z-751/864*u^2*v^2*z \\
&-2185/3456*u*v^3*z+425/2304*v^4*z+271/3456*u^3*z^2 \\
&+397/1152*u^2*v*z^2+1649/3456*u*v^2*z^2+115/1152*v^3*z^2, \\
&u^4*v-2873/6912*u^4*z-6061/3456*u^3*v*z-251/864*u^2*v^2*z \\
&+3757/3456*u*v^3*z-1445/2304*v^4*z+2261/3456*u^3*z^2 \\
&+383/1152*u^2*v*z^2-725/3456*u*v^2*z^2+257/1152*v^3*z^2, \\
&u^5-17851/6912*u^4*z-4319/3456*u^3*v*z-187/864*u^2*v^2*z \\
&-289/3456*u*v^3*z+4913/2304*v^4*z+4855/3456*u^3*z^2 \\
&+3589/1152*u^2*v*z^2-2935/3456*u*v^2*z^2-3077/1152*v^3*z^2 \} \} \\
I(C_5) = \\
\text{ideal}(x_1*x_3-x_0*x_4+5/17*x_1*x_4-144/289*x_2*x_4 \\
+720/4913*x_3*x_4-175/4913*x_4^2-5/17*x_0*x_5 \\
+144/289*x_1*x_5-720/4913*x_2*x_5+175/4913*x_3*x_5, \\
x_2*x_3-x_1*x_4+5/17*x_2*x_4-144/289*x_3*x_4+35/289*x_4^2 \\
-5/17*x_1*x_5+144/289*x_2*x_5-35/289*x_3*x_5, \\
x_3^2-x_2*x_4+5/17*x_3*x_4-7/17*x_4^2-5/17*x_2*x_5 \\
+7/17*x_3*x_5, x_0*x_2-3*x_0*x_4+2*x_1*x_4-61/17*x_2*x_4 \\
-36269/41616*x_3*x_4+71129/41616*x_4^2-2*x_0*x_5 \\
+10/17*x_1*x_5+77885/41616*x_2*x_5-279209/41616*x_3*x_5 \\
-4*x_5^2, x_1*x_2+2*x_0*x_4-25/289*x_1*x_4+11266/4913*x_2*x_4 \\
+7080/83521*x_3*x_4-11111021/12027024*x_4^2+314/289*x_0*x_5 \\
-1440/4913*x_1*x_5+76441/83521*x_2*x_5+47192093/12027024*x_3*x_5 \\
+x_4*x_5+2*x_5^2, \\
x_0*x_3+2*x_0*x_4+2*x_2*x_4+7/17*x_3*x_4-2557/2448*x_4^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+x_0x_5+10/17x_2x_5+9901/2448x_3x_5+x_4x_5+2x_5^2, \\
&x_2^2-x_0x_4+5/17x_1x_4-169/289x_2x_4+2035/4913x_3x_4 \\
&-1183/4913x_4^2-5/17x_0x_5+169/289x_1x_5 \\
&-2035/4913x_2x_5+1183/4913x_3x_5, \\
&x_0x_1+6x_0x_4-61/17x_1x_4+213427/41616x_2x_4 \\
&+465721/707472x_3x_4-1389109/707472x_4^2+61/17x_0x_5 \\
&+77885/41616x_1x_5-1880665/707472x_2x_5 \\
&+7756357/707472x_3x_5-x_4x_5+6x_5^2, \\
&x_1^2-3x_0x_4+9951/4913x_1x_4-309868/83521x_2x_4 \\
&-135991837/204459408x_3x_4+324926089/204459408x_4^2 \\
&-9951/4913x_0x_5+59305/83521x_1x_5+340451245/204459408 \\
&*x_2x_5-1347223129/204459408x_3x_5-4x_5^2, \\
&x_0^2-12x_0x_4+595/144x_1x_4-1591/144x_2x_4 \\
&-2101/2448x_3x_4+3433/816x_4^2-451/144x_0x_5 \\
&-425/144x_1x_5+9445/2448x_2x_5-18937/816x_3x_5-12x_5^2)
\end{aligned}$$

$$I(C_3) =$$

$$\begin{aligned}
&\text{ideal}(y_1^2-4913/2825y_0y_2+8381/5650y_2^2-8381/5650y_1y_3, \\
&y_0y_1-1224/2825y_0y_2+4913/5650y_2^2-4913/5650y_1y_3, \\
&y_0^2-5429/5650y_0y_2+1/2y_1y_2+612/2825y_2^2 \\
&-1/2y_0y_3-612/2825y_1y_3)
\end{aligned}$$

$$\Psi' =$$

$$\begin{aligned}
&\{ \{ 45985680u^5+215331877u^4v+311616851u^3v^2 \\
&+441575527u^2v^3+217238121uv^4-183751113u^4z \\
&-600034516u^3vz-960344110u^2v^2z-604357956uv^3z \\
&-115008417v^4z+166889697u^3z^2+494282191u^2vz^2 \\
&+444425067uv^2z^2+126151101v^3z^2 \}, \\
&\{ 4151485u^5+63294179u^4v+176273527u^3v^2+14901129u^2v^3 \\
&-54121608uv^4-35383426u^4z-238840582u^3vz \\
&-181731870u^2v^2z+18305838uv^3z+28652616v^4z \\
&+63932869u^3z^2+95995107u^2vz^2+40989159uv^2z^2 \\
&+3581577v^3z^2 \} \}
\end{aligned}$$

$$\Psi =$$

$$\begin{aligned}
&\{ \{ -6324578209345y_0^7+1021893387221628y_0^6y_1 \\
&-67705153953102797y_0^5y_1^2+2413936020780449384y_0^4y_1^3 \\
&-50385630890275418379y_0^3y_1^4+618549841783456745668y_0^2y_1^5 \\
&-4148014567927751691303y_0y_1^6+11746424186836712181144y_1^7 \},
\end{aligned}$$

$$\{ -10208153640960y_0^7+1728706262544629y_0^6y_1$$

$$\begin{aligned} & -120963580443373716*y_0^5*y_1^2+4578810390044983009*y_0^4*y_1^3 \\ & -101886524341292885824*y_0^3*y_1^4+1338233180172044707815*y_0^2*y_1^5 \\ & -9634449235519651619948*y_0*y_1^6+29390949548429238590595*y_1^7\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{7882665320448*y_0^7-1076199878062080*y_0^6*y_1 \\ & +63199130919800832*y_0^5*y_1^2-2067218782675365888*y_0^4*y_1^3 \\ & +40639462331627298816*y_0^3*y_1^4-479792577361215320064*y_0^2*y_1^5 \\ & +3147664716788792057856*y_0*y_1^6-8847184297266383745024*y_1^7\} \end{aligned}$$

## 25.2 Höhe der Parametrisierung

Für verschiedene Parametrisierungsverfahren wird die Höhe der erzeugten Parametrisierungen verglichen. Mit der Höhe wird der betragsmäßig größte Koeffizient bezeichnet. Bei Höhe größer als  $10^{18}$  wird nur noch die nächstgrößere Potenz  $10^m$  angegeben. Für die Funktion *otpar* aus Abschnitt 30, die das Parametrisierungsverfahren aus Abschnitt 19.2 implementiert, ist die Höhe  $ht_{otpar}$  angegeben, für die Funktion *impl2para* mit Option *optimal = true* aus dem *CASA*-Paket (Research Institute for Symbolic Computation (RISC-Linz) University of Linz) ist die Höhe  $ht_{CASA}$  angegeben, und für die Funktion *ratpar* aus dem Maple-Paket von Mark von Hoeij ist die Höhe  $ht_{ratpar}$  angegeben.

Beispiel	$ht_{otpar}$	$ht_{CASA}$	$ht_{ratpar}$
1	8	42...129600(*a)	8
2	2	2...1552(*b)	2
3	4	40	107897
4	233056107409	(*c)	48363799763090833
7	$10^{38}$ (*e)	$10^{177} \dots 10^{450}$	$10^{395}$
9	14	$14 \dots 10^{16}$ (*d)	14
10	75682415	$10^{83}$	$10^{607}$
12	67207	(*c)	104597230974186079
13	94314375	1395645771776	$10^{394}$
16	$10^{24}$	$10^{19}$	$10^{1620}$

- (\*a) Liefert Ergebnisse mit verschiedenen Höhen : 42, 1584, 107552, 129600 jeweils mit unnötiger algebraischer Körpererweiterung vom Grad 2, u.a
- (\*b) Liefert Ergebnisse mit verschiedenen Höhen: 2, 22, 88 und 1552 mit unnötiger algebraischer Körpererweiterung vom Grad 2, u.a.
- (\*c) keine Antwort
- (\*d) Liefert Ergebnisse mit verschiedenen Höhen : 14, 44, 456, 8319, 13080, 27084, 75696, 4029060017201439.
- (\*e) mit Funktion *otpar3* aus Abschnitt 30.2. Die Funktion *otpar* liefert eine Höhe von  $10^{88}$ .

Bei Beispiel 10 und 13 ist  $ht_{otpar}$  angegeben mit weiterer Optimierung gemäß Abschnitt 18 (der zweite Teil des Verfahrens, der Faktorisierung verwendet, ist noch nicht implementiert, aufgrund des unfertigen Faktorisierungsalgorithmus in Macaulay 2). Ohne den zweiten Schritt erhält man eine Höhe von 1222571625000 bei Beispiel 10 und 58946484375 bei Beispiel 13. Siehe dazu auch den letzten Abschnitt 25.1 Punkt (10).

## 25.3 Rechenzeiten

Für verschiedene Parametrisierungsverfahren werden die Rechenzeiten verglichen. Für die Funktion *par3* aus Abschnitt 30.2, die das Parametrisierungsverfahren aus Abschnitt 19.3 implementiert, ist die Rechenzeit  $T_{par3}$  angegeben. Diese setzt sich zusammen aus der Zeit zur Berechnung des adjungierten Ideals  $T_{adj}$  und der Zeit  $T_{p3}$  zur Berechnung einer Parametrisierung daraus, also

$T_{par3} = T_{adj} + T_{p3}$ . Für die Funktion *impl2para* mit Option *optimal = true* aus aus dem *CASA*-Paket ist die Rechenzeit  $T_{CASA}$  angegeben.

Beispiel	$T_{par3}/\text{sec}$	$T_{CASA}/\text{sec}$
1	0.65	6.1...99
3	1.03	1.9
7	25.06	338
9	1.19	1.8
10	2.91	17.0
12	61.22	(*a)
13	21.14	30.8
14	206.33	(*a)
16	20.0	41

(\*a) Abbruch mit Fehlermeldung.

Im folgenden wird die Rechenzeit  $T_{par3}$  in  $T_{adj}$  und  $T_{p3}$  aufgeschlüsselt. Außerdem wird die Funktion *par3* aus Abschnitt 30.2, die das Parametrisierungsverfahren aus Abschnitt 19.3 implementiert, mit der Funktion *par* aus Abschnitt 30.1, die das Parametrisierungsverfahren aus Abschnitt 19.2 implementiert verglichen. Zu diesem Zweck wird die Zeit  $T_p$  angegeben, die *par* zur Berechnung einer Parametrisierung aus dem adjungierten Ideal benötigt. Die Berechnung des adjungierten Ideals unterscheidet sich bei *par* und *par3* nicht.

Beispiel	$T_{par3}/\text{sec}$	$T_{adj}/\text{sec}$	$T_{p3}/\text{sec}$	$T_p/\text{sec}$
1	0.65	0.17	0.48	0.71
3	1.03	0.57	0.56	0.73
7	25.06	17.17	7.89	1626.34
9	1.19	0.23	0.96	0.96
10	2.91	1.71	1.2	2.36
12	61.22	5.34	55.88	112.66
13	21.14	11.32	9.82	10.94
14	206.33	3.61	202.72	261.96
16	20.0	10.14	9.86	51.71

## 26 Suche eines rationalen Punktes auf einer Konik

Der Algorithmus aus Abschnitt 15, der in Abschnitt 29 implementiert ist, wird verwendet, um einen rationalen Punkt  $P$  auf der Konik

$$y_0^2 + 1432801/568141*y_0*y_1 - 48806/568141*y_1^2 - 111119562684/182111347999*y_0*y_2 + 20623467408/182111347999*y_1*y_2 + 41120938700/182111347999*y_2^2 = 0$$

zu finden. Verwende die Notation aus Abschnitt 15. Zunächst transformiert der Algorithmus die Konik auf

$$5*y_0^2 - 5342798677*y_1^2 + 180275418451030495759918*y_2^2 = 0$$

Im folgenden ist jeweils  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $J(a, b, c)$  angegeben für die sukzessive erzeugten Koniken

$$a*y_0^2 + b*y_1^2 + c*y_2^2 = 0$$

in der Form  $a, b, c, J(a, b, c)$ :

5, -5342798677, 180275418451030495759918, 901377092255152478799590  
 1, -26713993385, 5722207299751752127049, 5722207299751752127049  
 1, -26713993385, 1179055104756428646019, 1179055104756428646019  
 1, -26713993385, 242470420571639544649, 242470420571639544649  
 1, -26713993385, 1326972939212206079, 1326972939212206079  
 1, -26713993385, 409240296449521, 409240296449521  
 5, -5342798677, 1056398745202, 5281993726010  
 1, 5774544079, -26713993385, 26713993385  
 1, -162830602, 5774544079, 5774544079  
 2, 53263731, -81415301, 162830602  
 1, -15344383, 106527462, 106527462  
 1, 894391, -15344383, 15344383  
 1, -228386, 894391, 894391  
 2, 64777, -114193, 228386  
 1, -38785, 129554, 129554  
 1, 3126, -38785, 38785  
 3, 1042, -1237, 3711  
 2, -101, 1563, 3126  
 1, 31, -202, 202  
 1, -7, 31, 31  
 1, 3, -7, 7  
 1, -1, 3, 3

Im letzten Schritt ist  $Q = 0$ .

Man bekommt:

$P = (420295787440776992574749020866127383160504654870436800918701963$   
 $364171631959903841659487765107001980972793567628831323120501861230:$   
 $211485639915374298155583360444383989166044481542953905770715609922$   
 $50712643280887786043891921508357629610132729027432028236646679776:$   
 $48835544765800610925269517638894017002062770010115252097006966307687$   
 $48829561792953978107070770982706894046161219436954457022755553)$

## 27 Plots

Bei jedem Plot ist die Beispielnummer angegeben und außerdem

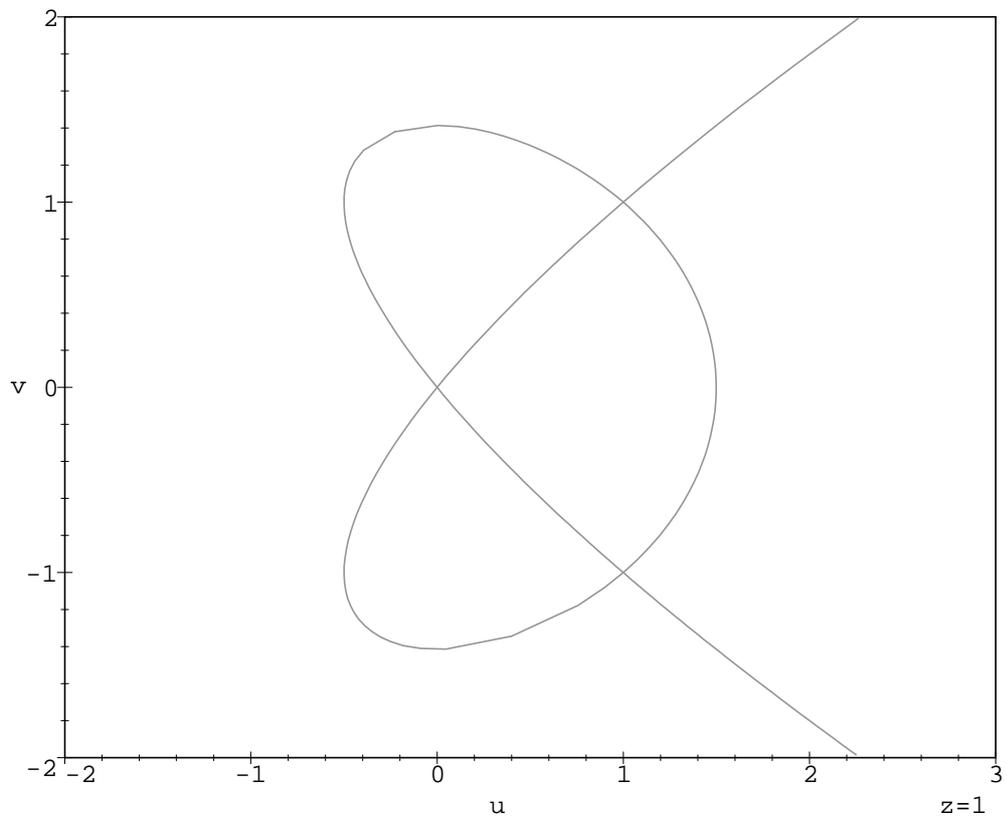
Gleichung der Kurve  $F = 0$  mit  $F \in \mathbb{Q}[u, v, z]$

Singularitäten in der Form [Koordinaten, Multiplizität, Verzweigungsindex]

Parametrisierung in der Form  $\begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$  mit  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{Q}[r_{-0}, r_{-1}]$

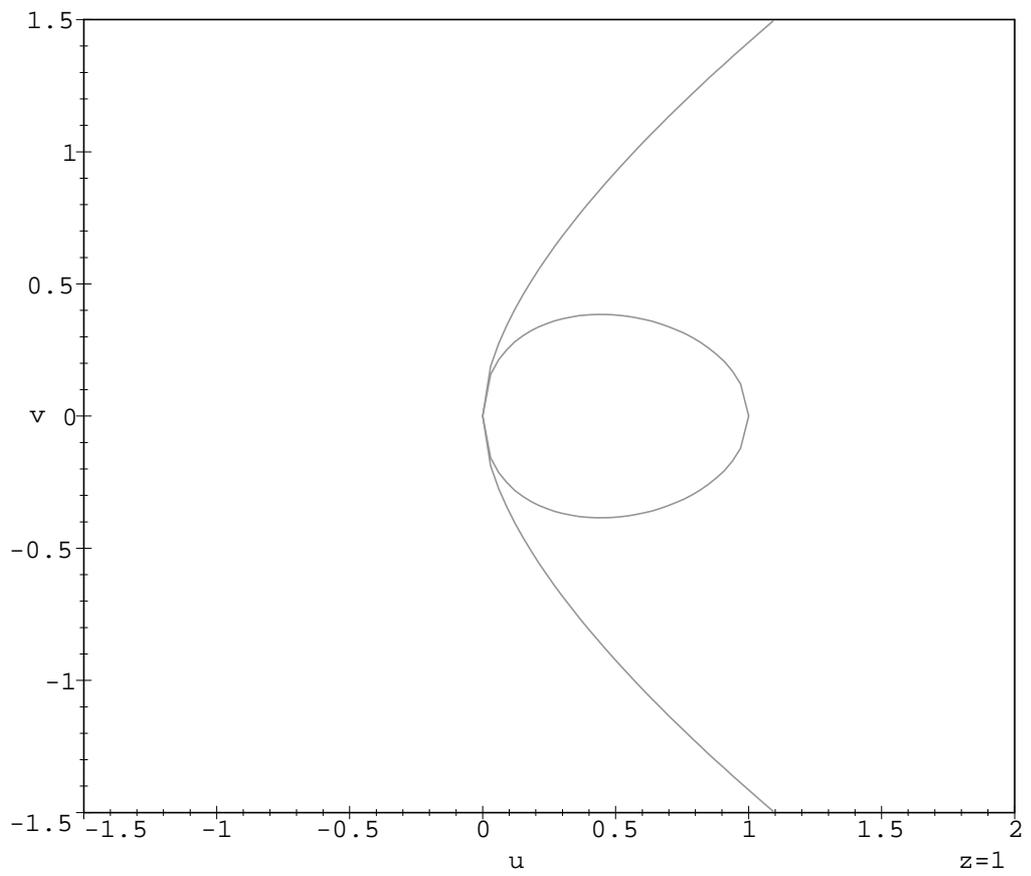
**Beispiel 1:**

$$v^4 - 2u^3z + 3u^2z^2 - 2v^2z^2 = 0$$
$$[[1, 1, 1], 2, 1], [[1, -1, 1], 2, 1], [[0, 0, 1], 2, 1]$$
$$\{-3r_0^4 + 8r_0^2r_1^2 - 4r_1^4\}$$
$$\{-6r_0^3r_1 + 4r_0r_1^3\}$$
$$\{-(2r_0^4)\}$$



**Beispiel 2:**

$$(v^2 - u \cdot z)^2 - u^3 \cdot z = 0$$
$$[[0, 0, 1], 2, 3]$$
$$\{r_0^4 - 2 \cdot r_0^2 \cdot r_1^2 + r_1^4\}$$
$$\{r_0^3 \cdot r_1 - r_0 \cdot r_1^3\}$$
$$\{r_0^4\}$$



**Beispiel 3:**

$$v^5 + 2*u*v^2*z^2 + 2*u*v^3*z + u^2*v*z^2 - 4*u^3*v*z + 2*u^5 = 0$$

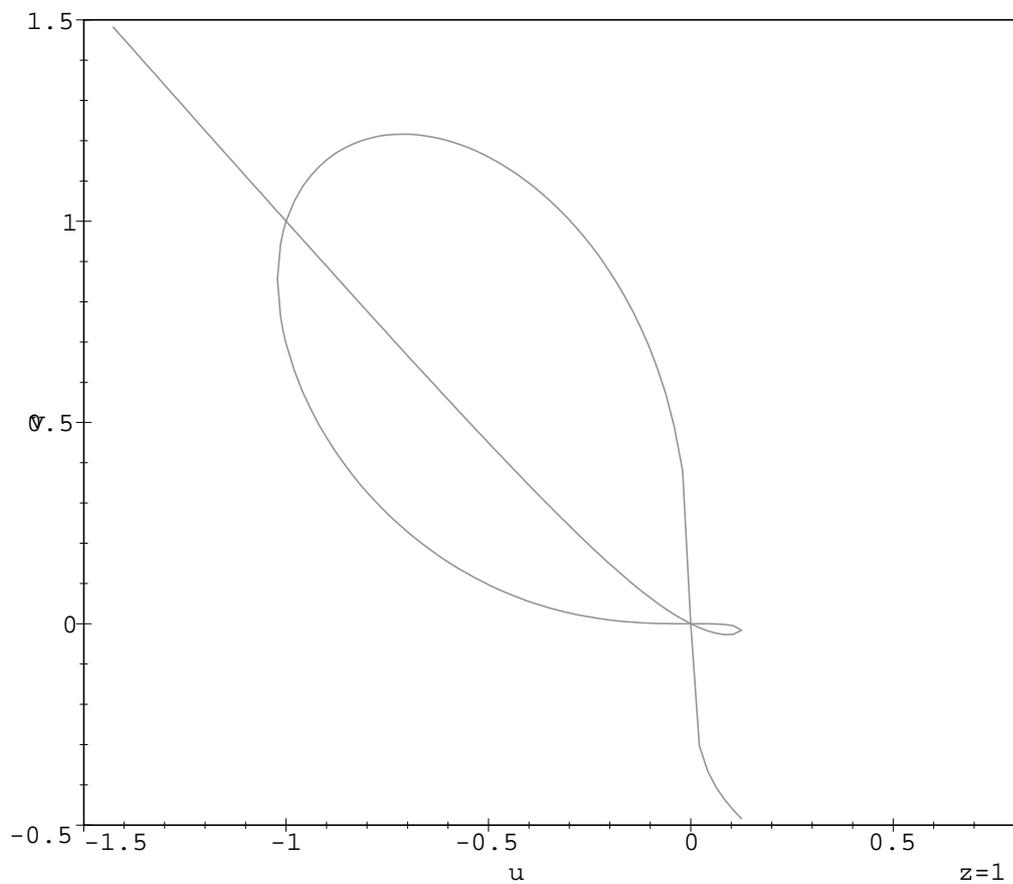
$$[[0, 0, 1], 3, 3],$$

$$[[-1, 1, 1], 2, 1], [[\text{RootOf}(T^2 - T + 1), -1 + \text{RootOf}(T^2 - T + 1)], 1], 2, 1]$$

$$\{y_0^4*y_1 - 2*y_0^3*y_1^2\}$$

$$\{-2*y_0^2*y_1^3 + 4*y_0*y_1^4\}$$

$$\{y_0^5 - 4*y_1^5\}$$

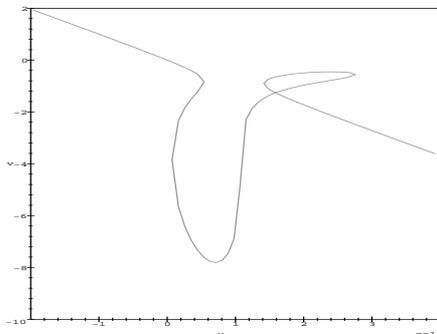


Beispiel 7:

$$\begin{aligned}
 & 36*u^7+64*u^6*v+1440*u^5*v^2+216*u^4*v^3+120*u^3*v^4 \\
 & +1728*u^2*v^5+243*u*v^6+36*v^7-96*u^6*z+108*u^5*v*z \\
 & + 16*u^4*v^2*z+576*u^3*v^3*z+216*u^2*v^4*z-12*u*v^5*z \\
 & + 216*v^6*z+88*u^5*z^2+3456*u^4*v*z^2+243*u^3*v^2*z^2 \\
 & + 124*u^2*v^3*z^2+3816*u*v^4*z^2+297*v^5*z^2+162*u^4*z^3 \\
 & - 20*u^3*v*z^3+936*u^2*v^2*z^3+342*u*v^3*z^3-96*v^4*z^3 \\
 & + 1944*u^3*z^4+81*u^2*v*z^4-32*u*v^2*z^4+1536*v^3*z^4 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

- [0, 0, 1], 3, 3],
- [RootOf(T^3-4), -1/2\*RootOf(T^3-4)^2, 1], 2, 1],
- [RootOf(T^2-T+1), -1+RootOf(T^2-T+1), 1], 3, 3],
- [-1, 1, 1], 3, 3]

$$\begin{aligned}
 & \{ \{ 11457360458878749696*y_0^7+12965201964117619794432*y_0^6*y_1 \\
 & +9250393137027435382931136*y_0^5*y_1^2+4829156341995171523293350 \\
 & 208*y_0^4*y_1^3+1687453738018947613580455822896*y_0^3*y_1^4 \\
 & +448153361575478229854715218502192*y_0^2*y_1^5+79736695418472445 \\
 & 886767253963210331*y_0*y_1^6+63114362983593286067243096511347657 \\
 & 70*y_1^7 \}, \\
 & \{ -4244077860615515136*y_0^7-8744668809686929020672*y_0^6*y_1 \\
 & -9596123243312035056181056*y_0^5*y_1^2-6872008996879122437240194 \\
 & 608*y_0^4*y_1^3-3529032222759874271239227849216*y_0^3*y_1^4 \\
 & -1259312803373074488432707328641082*y_0^2*y_1^5-3115987799285080 \\
 & 91596372983563265696*y_0*y_1^6-449111237160138024985206637663562 \\
 & 71320*y_1^7 \}, \\
 & \{ 5052780256863450112*y_0^7+7844847263181688946176*y_0^6*y_1 \\
 & +7262668627630899387355776*y_0^5*y_1^2+4113085052214588627966614 \\
 & 528*y_0^4*y_1^3+1634881014545893764035219487068*y_0^3*y_1^4+4514 \\
 & 69004436357923994649705368416*y_0^2*y_1^5+6573272700893688846801 \\
 & 8732153009776*y_0*y_1^6+6477092927837872957011452071323240157*y_1^7 \} \}
 \end{aligned}$$



**Beispiel 11:**

$$\begin{aligned}
 & -24135/322*u^6-532037/6440*u^5*v+139459/560*u^4*v^2-1464887/12880 \\
 & *u^3*v^3+72187/25760*u^2*v^4+9/8*u*v^5+1/8*v^6-403511/3220*u^5*z \\
 & -40817/920*u^4*v*z+10059/80*u^3*v^2*z-35445/1288*u^2*v^3*z+19/4 \\
 & *u*v^4*z+3/4*v^5*z-20743/805*u^4*z^2+126379/3220*u^3*v*z^2 \\
 & -423417/6440*u^2*v^2*z^2+11/2*u*v^3*z^2+3/2*v^4*z^2 \\
 & +3443/140*u^3*z^3+u^2*v*z^3+u*v^2*z^3+v^3*z^3 \\
 & =0
 \end{aligned}$$

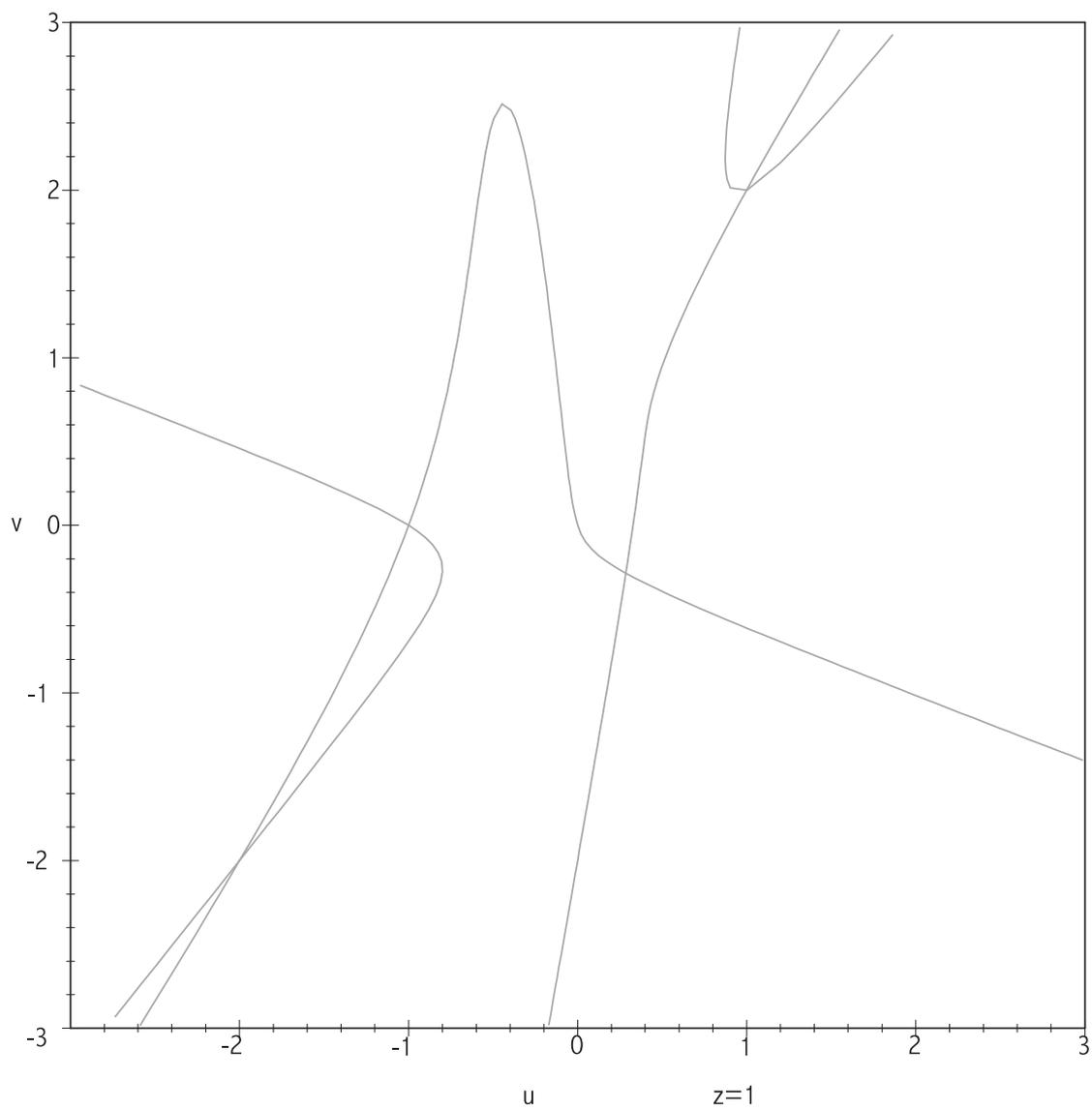
- [[0, -2, 1], 3, 3],
- [[1, 2, 1], 2, 1], [[2/7, -2/7, 1], 2, 1], [[-2, -2, 1], 2, 1],
- [[0, 0, 1], 3, 3],
- [[ -1, 0, 1], 2, 1]

$$\begin{aligned}
 & \{ \{ 60001312478141565423717004132071380745690292852679587984975611 \\
 & 4796026736083292922472580185270870994120521731839815743632656*y_0^6 \\
 & +229248486890420266629644276021068366742040870549292705981069888 \\
 & 4685775214357454136734362639193470590428639594522*y_0^5*y_1 \\
 & +351284496564297993364181775165527361560427278555541650614952577 \\
 & 1557893478644409136680146334531873360*y_0^4*y_1^2+26938744996644 \\
 & 1692020634588432002819646499066197411109791135755157398552865290 \\
 & 5506180960*y_0^3*y_1^3+10276152826638952022505584837090467304318 \\
 & 60521519374438964526374221780349440*y_0^2*y_1^4+1505719212214714 \\
 & 39967013967509240416450780156615673536739581952*y_0*y_1^5-287873
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 6670912444478563194020798937628991353225216*y_1^6 \}, \\
 & \{ 10625393587229393975175368469636193348241370835587684342266743161 \\
 & 68573223361842082366745342605135398097020423552056683726591*y_0^6 \\
 & +3739255018136601865039650572518476788023364224423050309740734838 \\
 & 682701271041093483250740827199121614545648040167*y_0^5*y_1+502851 \\
 & 80293473695552864734220709867101547350676887204938127155764509101 \\
 & 98352046045304965787801456210*y_0^4*y_1^2+30545768171920384238165 \\
 & 82836487902292895588104965074575235689417414209505847432289422560 \\
 & *y_0^3*y_1^3+6209059714293910734836675832943737250339414848801141 \\
 & 17581795601908781667840*y_0^2*y_1^4-13863195779882914804794347351 \\
 & 6414599770670605636400634548758528*y_0*y_1^5-57426395315988923016
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 076605883899946428655253323776*y_1^6 \}, \\
 & \{ 2645799220846368287897372338321313182316429460856979123353810468 \\
 & 913521417057787580703689145059067461040417861878175776260129/2*y_0^6 \\
 & +1086858953444094467165282428797954356488696932375890096576310361 \\
 & 5877477820329332832066802926219940701052826806573/2*y_0^5*y_1+878 \\
 & 68123529833990123850898981988018060236436821370406242213698577000 \\
 & 76658517604682248087521453228995*y_0^4*y_1^2+70275231544324251188 \\
 & 57841484319154291708441097812087197138614511379914592230316212698 \\
 & 320*y_0^3*y_1^3+2828099682689730839877201802418220071626794277729
 \end{aligned}$$

$027966878238092647929116480*y_0^2*y_1^4+4973106997731063687179168$   
 $96220699738896024728675608708319248384*y_0*y_1^5+2046272482391497$   
 $2617203980136035494578481760534528*y_1^6\}}$

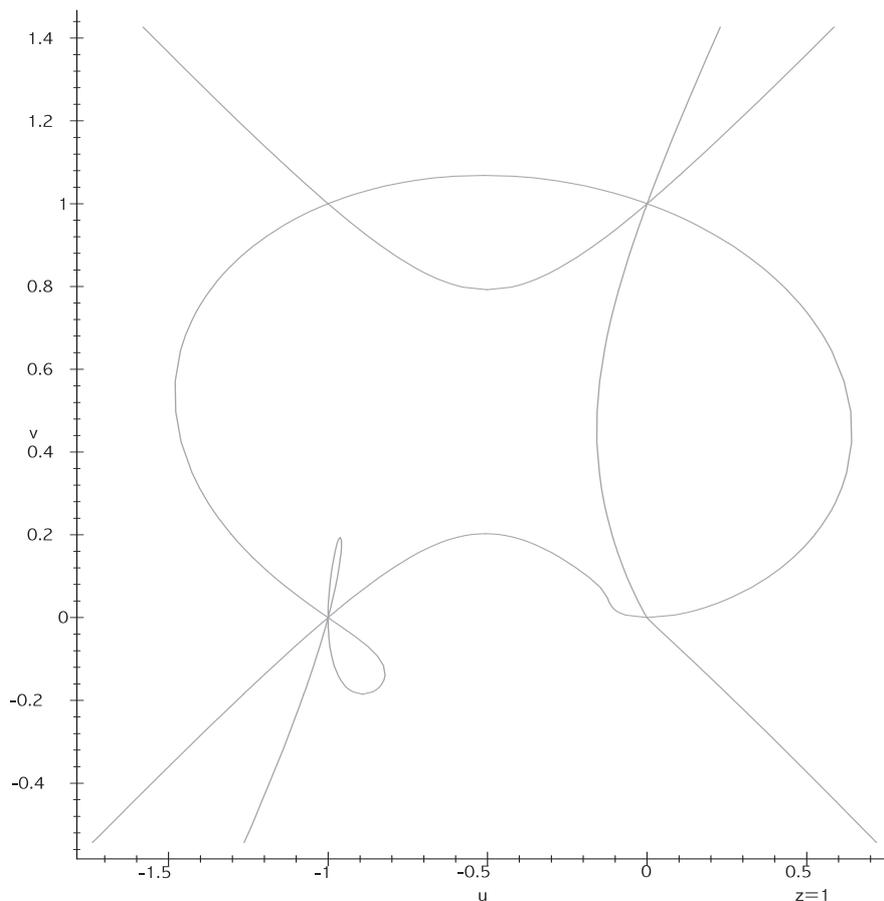


**Beispiel 12:**

$$\begin{aligned}
 & u^9 + u^7 v^2 - u^6 v^3 - 6u^5 v^4 + 3u^4 v^5 + 4u^3 v^6 - 3u^2 v^7 \\
 & - u v^8 + v^9 + 4u^8 z - u^7 v z + 5u^6 v^2 z + 9u^5 v^3 z - 21u^4 v^4 z \\
 & - 6u^3 v^5 z + 16u^2 v^6 z + u v^7 z - 5v^8 z + 6u^7 z^2 - 4u^6 v z^2 \\
 & + 3u^5 v^2 z^2 + 30u^4 v^3 z^2 - 12u^3 v^4 z^2 - 27u^2 v^5 z^2 \\
 & + 6u v^6 z^2 + 10v^7 z^2 + 4u^6 z^3 - 6u^5 v z^3 - 8u^4 v^2 z^3 \\
 & + 25u^3 v^3 z^3 + 15u^2 v^4 z^3 - 14u v^5 z^3 - 10v^6 z^3 + u^5 z^4 \\
 & - 4u^4 v z^4 - 10u^3 v^2 z^4 + 2u^2 v^3 z^4 + 11u v^4 z^4 + 5v^5 z^4 \\
 & - u^3 v z^5 - 3u^2 v^2 z^5 - 3u v^3 z^5 - v^4 z^5 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{ [ [0, 0, 1], 4, 6 ], [ [-1, 1, 1], 4, 6 ], [ [-1, 0, 1], 4, 6 ], \\
 & [ [0, 1, 1], 5, 10 ] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{ \{-y_0^8 y_1 - 22y_0^7 y_1^2 - 203y_0^6 y_1^3 - 1038y_0^5 y_1^4 - 3238y_0^4 \\
 & y_1^5 - 6335y_0^3 y_1^6 - 7610y_0^2 y_1^7 - 5140y_0 y_1^8 - 1496y_1^9\}, \\
 & \{y_0^7 y_1^2 + 18y_0^6 y_1^3 + 135y_0^5 y_1^4 + 549y_0^4 y_1^5 + 1311y_0^3 \\
 & y_1^6 + 1842y_0^2 y_1^7 + 1412y_0 y_1^8 + 456y_1^9\}, \\
 & \{y_0^9 + 29y_0^8 y_1 + 361y_0^7 y_1^2 + 2536y_0^6 y_1^3 + 11109y_0^5 y_1^4 \\
 & + 31543y_0^4 y_1^5 + 58155y_0^3 y_1^6 + 67207y_0^2 y_1^7 + 44203y_0 y_1^8 \\
 & + 12611y_1^9\} \}
 \end{aligned}$$

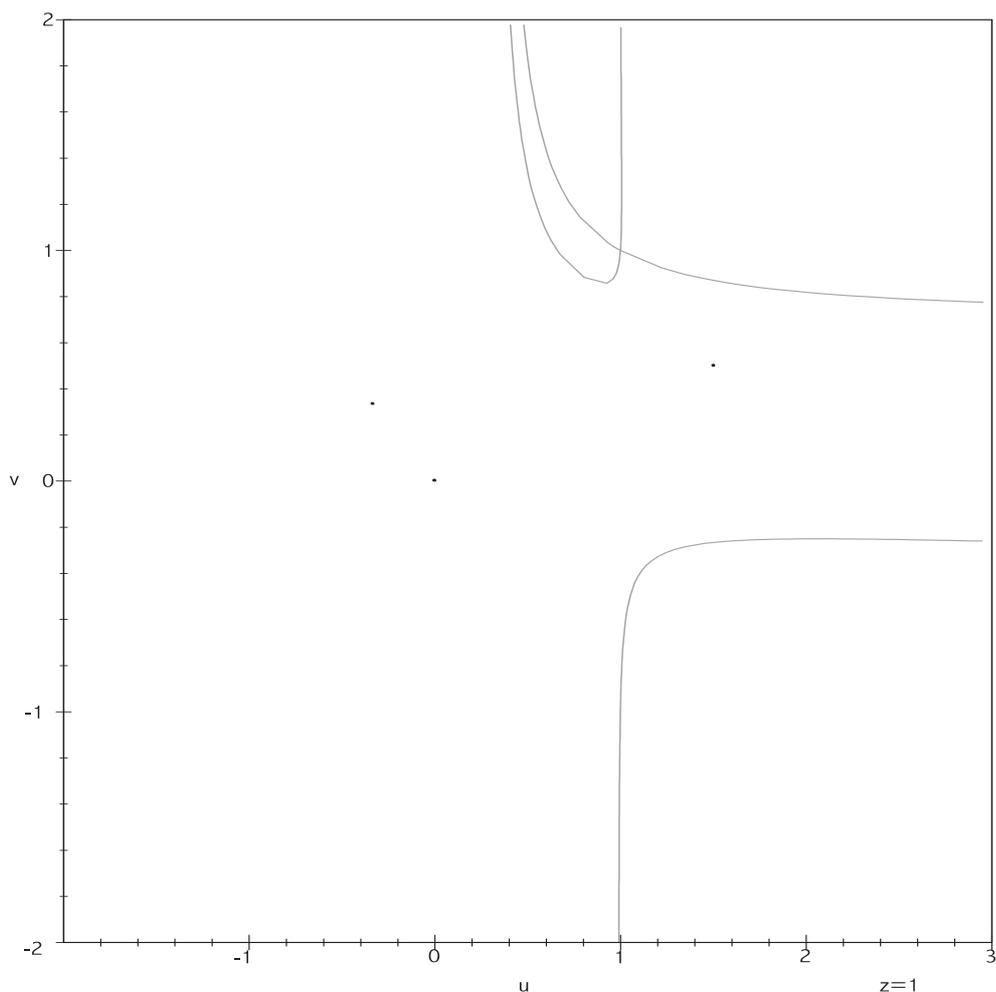


**Beispiel 13:**

$$1251*v^4*z^3+5184*u*v^3*z^3+5354*u^2*v^2*z^3+115*u^4*z^3 - 9552*u*v^4*z^2-22496*u^2*v^3*z^2-5424*u^3*v^2*z^2 - 160*u^4*v*z^2+22080*u^2*v^4*z+17472*u^3*v^3*z-13824*u^3*v^4 = 0$$

$$\begin{aligned} & [[-1/3, 1/3, 1], 2, 1], [[3/2, 1/2, 1], 2, 1], [[0, 0, 1], 4, 6] \\ & [[-1, 0, 0], 3, 3], [[0, 1, 0], 3, 3], \\ & [[1, 1, 1], 2, 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ \{ 3375*y_0^7+126225*y_0^6*y_1+1919835*y_0^5*y_1^2 \\ & +14942965*y_0^4*y_1^3+63449389*y_0^3*y_1^4+149578803 \\ & *y_0^2*y_1^5+185135625*y_0*y_1^6+94314375*y_1^7 \}, \\ & \{ -64*y_0*y_1^2*(225*y_0^4+5520*y_0^3*y_1+47050*y_0^2*y_1^2 \\ & +137448*y_0*y_1^3+139725*y_1^4) \}, \\ & \{ -18432*y_0*y_1^3*(15*y_0^3+193*y_0^2*y_1+661*y_0*y_1^2+675*y_1^3) \} \} \end{aligned}$$



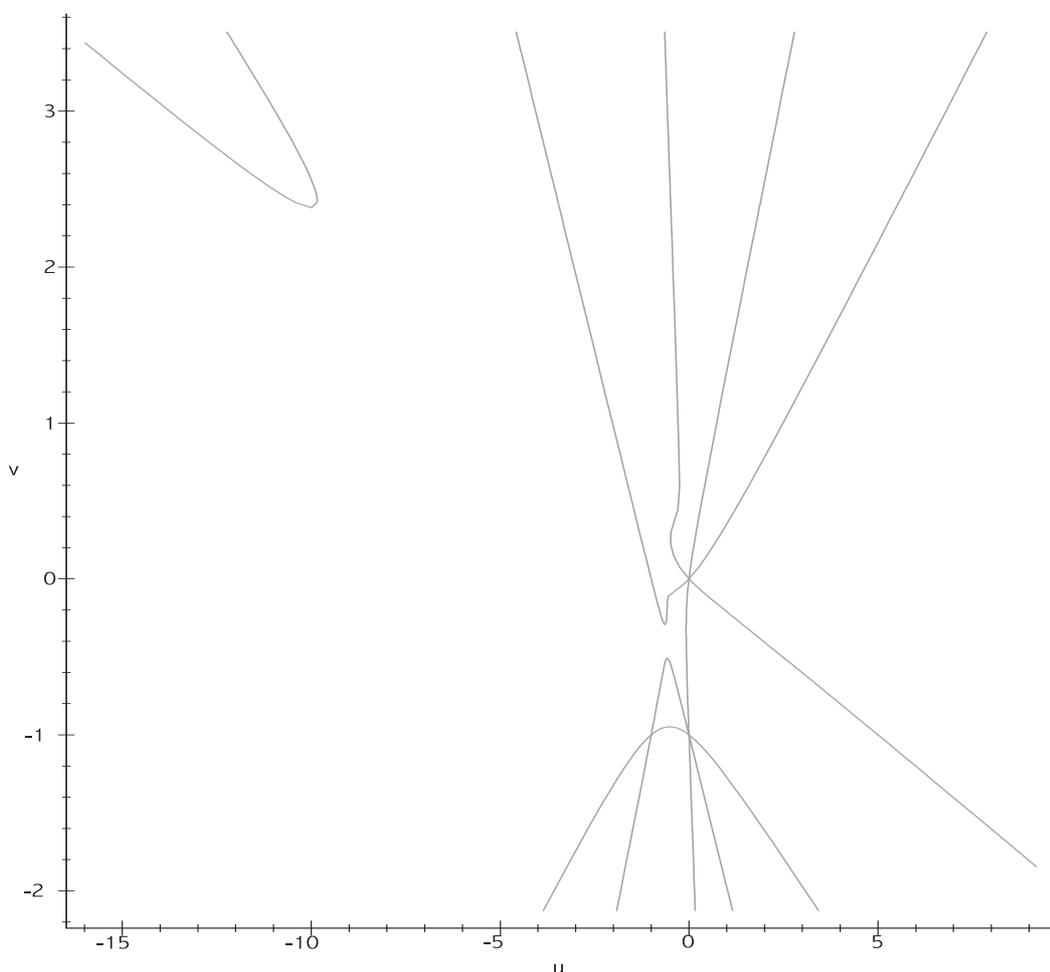
**Beispiel 15:**

$$\begin{aligned}
 & u^{10} + 6u^9v - 30u^7v^3 - 15u^6v^4 + u^5v^5 + u^4v^6 + 6u^3v^7 \\
 & + u^2v^8 + 7u^2v^9 + v^{10} + 5u^9z + 24u^8vz - 30u^7v^2z - 120u^6v^3z \\
 & - 43u^5v^4z + 5u^4v^5z + 20u^3v^6z + 10u^2v^7z + 29u^2v^8z \\
 & + 5v^9z + 10u^8z^2 + 36u^7vz^2 - 105u^6v^2z^2 - 179u^5v^3z^2 \\
 & - 38u^4v^4z^2 + 25u^3v^5z^2 + 25u^2v^6z^2 + 46u^2v^7z^2 + 10v^8z^2 \\
 & + 10u^7z^3 + 24u^6vz^3 - 135u^5v^2z^3 - 117u^4v^3z^3 - u^3v^4z^3 \\
 & + 25u^2v^5z^3 + 34u^2v^6z^3 + 10v^7z^3 + 5u^6z^4 + 6u^5vz^4 \\
 & - 75u^4v^2z^4 - 27u^3v^3z^4 + 10u^2v^4z^4 + 11u^2v^5z^4 + 5v^6z^4 \\
 & + u^5z^5 - 15u^3v^2z^5 + u^2v^3z^5 + uv^4z^5 + v^5z^5 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{ [ [0, -1, 1], 5, 10 ], [ [0, 0, 1], 5, 10 ], [ [-1, 0, 1], 5, 10 ], \\
 & [ [-1, -1, 1], 4, 6 ] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{-38812518324554185891606961243172228131906206337226637277037296131 \\
 & 677184738399251462714638571*y_0^{10} - 60000813619346465787083853603246 \\
 & 47854230715256775957108771932697915837779173292327364987402*y_0^9*y_1 \\
 & - 417607193162003351338810927417395596416207973550859586928284843313 \\
 & 543138123896270619641823*y_0^8*y_1^2 - 172325079011736546344708222360 \\
 & 37224701514036456831528704200945781890420708909109699686780*y_0^7*y_1^3 \\
 & - 466887348723789918634281226557390432076031238435257018161385014141 \\
 & 430025314098570048539*y_0^6*y_1^4 - 867826453091813127325390010675922 \\
 & 5053769579777383180496396397950337927966005656187937*y_0^5*y_1^5 - 11 \\
 & 2074072022403857906126341909470223454525968339077728918587604971069 \\
 & 226879994299059*y_0^4*y_1^6 - 992966184021515813301293253509240185403 \\
 & 301135668103404839889076897174466685909262*y_0^3*y_1^7 - 577625848074 \\
 & 9900821441256177323295362332725692691342643228614293487665216395254 \\
 & *y_0^2*y_1^8 - 199217761714411620068552580909554206246231950156910912 \\
 & 76240421402439581975759*y_0*y_1^9 - 309338805630668422934821809061441 \\
 & 58687947440655976858513576778309008100945*y_1^{10} \}, \\
 & \{ 562213720843155432712986800801793408380831337737856079856421544168 \\
 & 39316427650140945820241909*y_0^{10} + 882874324043335270012283771576546 \\
 & 8053962200803913072006913940564557442235968540067451898048*y_0^9*y_1 \\
 & + 624169083875591828574096453614446505268758758588055075042755728268 \\
 & 793954971720217841054687*y_0^8*y_1^2 + 261611313138208242505178778927 \\
 & 60872789494104154906199097657628528115743226573161519135227*y_0^7*y_1^3 \\
 & + 719906461590892216859206142420283857765830279380498117132132222504 \\
 & 916348805919513503391*y_0^6*y_1^4 + 135905199768689011366925805410266 \\
 & 80046574549544619852921612673702043531182859997841646*y_0^5*y_1^5 \\
 & + 178251056346833286376352751872282957923045845234292201446972401845 \\
 & 929187324656763932*y_0^4*y_1^6 + 160387726949257763612903737296010866 \\
 & 8124296217017225920166445808661615251191510768*y_0^3*y_1^7 + 94750273 \\
 & 8217433139550433738440534032057218749951988734741340148195975051216 \\
 & 5484*y_0^2*y_1^8 + 33185488223969866405359612793290398689009745969666 \\
 & 142130977325486988967003669*y_0*y_1^9 + 52327712865878243899801522463 \\
 & 621280101660502538391746259672254071434469870*y_1^{10} \}, \\
 & \{ 127586313937626726363006033620726278367040198849906367189767685549 \\
 & 493937100485438075183642901*y_0^{10} + 19915062339161053457747385423710
 \end{aligned}$$

270381567926646844008465791546518051665009485882109810886112\*y\_0^9\*y\_1  
 +139934250020709660688459522887672879194608244690570369304556331770  
 7274608295262645823469588\*y\_0^8\*y\_1^2+58286745722040410227675602241  
 370217632700039914162250840767569759490796502486954733440542\*y\_0^7\*y\_1^3  
 +159377460397734603882813828054235431598766942473622314866616700578  
 6816356964069242409263\*y\_0^6\*y\_1^4+29892607508769793033038732807034  
 994699979384625581214562109934959654917215700719598367\*y\_0^5\*y\_1^5  
 +389465732195327932857156199281131373062573250659973741256919073984  
 971328996151808019\*y\_0^4\*y\_1^6+348051260228741013438888191228183209  
 7806013243617447920525671966013347816955154722\*y\_0^3\*y\_1^7+20417655  
 8897407007151579047479735084280343848124851993068116002943301729227  
 40629\*y\_0^2\*y\_1^8+7099668363054500149948844423374390248912728747873  
 4597971034672314866220877217\*y\_0\*y\_1^9+1111193687568049271214859976  
 08018154172072885741136750983906255591623042881\*y\_1^10}}



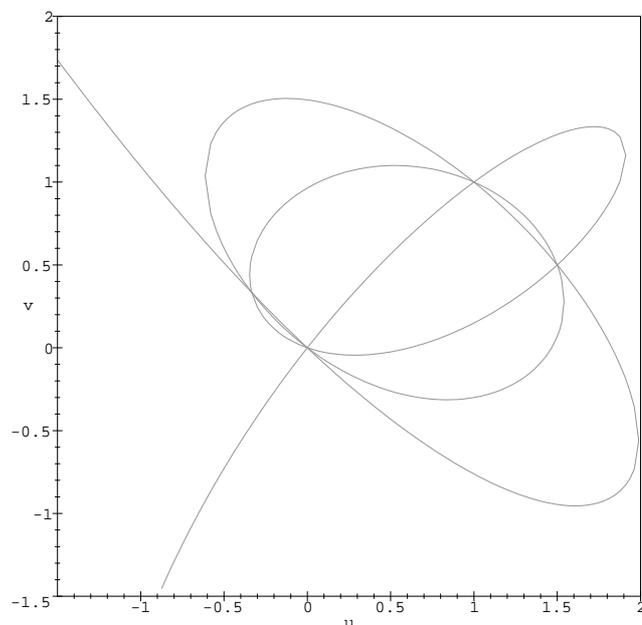
Beispiel 16:

$$\begin{aligned}
 & 2*u^7+u^6*v+3*u^5*v^2+u^4*v^3+2*u^3*v^4+u^2*v^5+2*u*v^6+v^7 \\
 & -7780247/995328*u^6*z-78641/9216*u^5*v*z-10892131/995328*u^4*v^2*z \\
 & -329821/31104*u^3*v^3*z-953807/331776*u^2*v^4*z-712429/248832*u*v^5*z \\
 & +1537741/331776*v^6*z+2340431/248832*u^5*z^2+5154337/248832*u^4*v*z^2 \\
 & +658981/41472*u^3*v^2*z^2+1737757/124416*u^2*v^3*z^2 \\
 & -1234733/248832*u*v^4*z^2-1328329/82944*v^5*z^2-818747/248832*u^4*z^3 \\
 & -1822879/124416*u^3*v*z^3-415337/31104*u^2*v^2*z^3 \\
 & +1002655/124416*u*v^3*z^3+849025/82944*v^4*z^3 \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

$[[0,0,1],4,6],$

$[[1,1,1],3,3], [[-1/3,1/3,1],3,3], [[3/2,1/2,1],3,3]$

$$\begin{aligned}
 & \{-6324578209345*y_0^7+1021893387221628*y_0^6*y_1 \\
 & -67705153953102797*y_0^5*y_1^2+2413936020780449384*y_0^4*y_1^3 \\
 & -50385630890275418379*y_0^3*y_1^4+618549841783456745668*y_0^2*y_1^5 \\
 & -4148014567927751691303*y_0*y_1^6+11746424186836712181144*y_1^7\}, \\
 & \{-10208153640960*y_0^7+1728706262544629*y_0^6*y_1 \\
 & -120963580443373716*y_0^5*y_1^2+4578810390044983009*y_0^4*y_1^3 \\
 & -101886524341292885824*y_0^3*y_1^4+1338233180172044707815*y_0^2*y_1^5 \\
 & -9634449235519651619948*y_0*y_1^6+29390949548429238590595*y_1^7\}, \\
 & \{7882665320448*y_0^7-1076199878062080*y_0^6*y_1 \\
 & +63199130919800832*y_0^5*y_1^2-2067218782675365888*y_0^4*y_1^3 \\
 & +40639462331627298816*y_0^3*y_1^4-479792577361215320064*y_0^2*y_1^5 \\
 & +3147664716788792057856*y_0*y_1^6-8847184297266383745024*y_1^7\}
 \end{aligned}$$



## Teil V

# Skripten

## 28 Berechnung des adjungierten Ideals

### 28.1 Berechnung des adjungierten Ideals mit Saturierung

Die folgende Funktion berechnet mit dem Verfahren aus Abschnitt 11.4 das adjungierte Ideal für eine ebene projektive Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten:

```
-- Funktion adjs
--
-- Parameter:
-- eine 1x1-Matrix, die die Gleichung einer projektiven
-- irred. ebenen Kurve mit nur gewöhnlichen Mehrfachpunkten
  enthaelt
--
-- Ausgabe:
-- eine Liste mit 2 Elementen
-- das erste Element ist eine Liste, mit Elementen der
-- Form {Ideal der m-fach-Punkte, Anzahl der m-fach-Punkte, m}
-- das zweite Element ist eine Matrix, die die minimalen Erzeuger
-- des adjungierten Ideals enthaelt
--
adjs=method()
adjs(Matrix):=(m0)->(
Rx:=ring m0;
n:=quote n;
q:=quote q;
Ji:=quote Ji;
Iadj:=quote Iadj;
qb:=quote qb;
mIadj:=quote mIadj;
l:=quote l;
rd:=quote rd;
anzge:=quote anze;
Iia:=quote Iia;
maxs:=quote maxs;
sm:=quote sm;
ap:=quote ap;
n=(degree(m0_(0,0)))#0;
q=1;
Ji={0};
Jd=diff(vars Rx,m0);
while (q<n+1 and (ideal Jd)!=(ideal(vars Rx))^(n-q))
do (Ji=append(Ji,mingens ideal Jd),Jd=diff(vars Rx,Jd),q=q+1);
Iadj=(ideal(vars Rx))^(n-q);
q=q-1;
```

```

qb=q;
Ii={};
maxs=(n-1)*(n-2);
sm=0;
while (q>0 and sm<maxs) do (
mIadj=mingsens Iadj;
if ((q==1) and (n>5)) then mIadj=Ji#2;
anzge=rank source mIadj;
l=deepSplice({-anzge..-1})-deepSplice({1..anzge});
rd=random(Rx^l,Rx^{-anzge-1});
while (rank source compress transpose rd)!=(rank source
transpose rd) do (rd=random(Rx^l,Rx^{-anzge-1}));
te=(mIadj*rd)_(0,0);
Iia=saturate(ideal Ji#(q),ideal te);
Iadj=intersect(Iia^q,Iadj);
if Iia!=(ideal substitute(matrix {{1}},Rx)) then (
ap=anzp(Iia);
sm=sm+ap*q*(q+1);
Ii=append(Ii,{Iia,ap,q+1});
print {name Iia,ap,q+1}
);
q=q-1);
while (q>0) do (
Ii=append(Ii,{ideal substitute(matrix {{1}},Rx),0,q+1});
q=q-1);
{Ii,mingsens Iadj})
anzp=method()
anzp(Ideal):=(idt)->(
Rx:=ring idt;
Kr:=Rx/idt;
Ry:=K[y_0,y_1];
rd:=transpose substitute(random(Rx^{0,0},Rx^{-1}),Kr);
rh:=map(Kr,Ry,rd);
ge:=gens ker rh;
(degree ge_(0,0))#0)
--
-- Bsp:
-- K=QQ
-- Rx=K[u,v,z]
-- m0=matrix {{v^4-2*u^3*z+3*u^2*z^2-2*v^2*z^2}}
-- m0=matrix {{v^5+2*u*v^2*z^2+2*u*v^3*z+u^2*v*z^2-4*u^3*v*z
+2*u^5}}
-- m0=matrix {{36*u^7+64*u^6*v+1440*u^5*v^2+216*u^4*v^3+120*
u^3*v^4+1728*u^2*v^5+243*u*v^6+36*v^7-96*u^6*z+108*u^5*v*z+1
6*u^4*v^2*z+576*u^3*v^3*z+216*u^2*v^4*z-12*u*v^5*z+216*v^6*z
+88*u^5*z^2+3456*u^4*v*z^2+243*u^3*v^2*z^2+124*u^2*v^3*z^2+3
816*u*v^4*z^2+297*v^5*z^2+162*u^4*z^3-20*u^3*v*z^3+936*u^2*v
^2*z^3+342*u*v^3*z^3-96*v^4*z^3+1944*u^3*z^4+81*u^2*v*z^4-32
*u*v^2*z^4+1536*v^3*z^4}}
-- m0=matrix {{u^5*v^5+21*u^5*v^4*z-36*u^4*v^5*z-19*u^5*v^3*

```

```

z^2+12*u^4*v^4*z^2+57*u^3*v^5*z^2+u^5*v^2*z^3+u^4*v^3*z^3-53
*u^3*v^4*z^3-19*u^2*v^5*z^3+u^5*v*z^4+43*u^3*v^3*z^4+u*v^5*z
^4+u^5*z^5-15*u^3*v^2*z^5+u^2*v^3*z^5+u*v^4*z^5+v^5*z^5}}
-- m0=matrix {{u^4-14*u^2*v^2+v^4+8*u^2*v*z+8*v^3*z}}
-- m0=matrix {{14440*u^5-16227*u^4*v+10812*u^3*v^2-13533*u^2
*v^3+3610*u*v^4+1805*v^5+14440*u^4*z-18032*u^3*v*z+16218*u^2
*v^2*z-12626*u*v^3*z+3610*v^4*z+3610*u^3*z^2-4508*u^2*v*z^2+
5406*u*v^2*z^2-2703*v^3*z^2}}
-- m0=matrix {{u^9+u^7*v^2-u^6*v^3-6*u^5*v^4+3*u^4*v^5+4*u^3
*v^6-3*u^2*v^7-u*v^8+v^9+4*u^8*z-u^7*v*z+5*u^6*v^2*z+9*u^5*v
^3*z-21*u^4*v^4*z-6*u^3*v^5*z+16*u^2*v^6*z+u*v^7*z-5*v^8*z+6
*u^7*z^2-4*u^6*v*z^2+3*u^5*v^2*z^2+30*u^4*v^3*z^2-12*u^3*v^4
*z^2-27*u^2*v^5*z^2+6*u*v^6*z^2+10*v^7*z^2+4*u^6*z^3-6*u^5*v
*z^3-8*u^4*v^2*z^3+25*u^3*v^3*z^3+15*u^2*v^4*z^3-14*u*v^5*z^
3-10*v^6*z^3+u^5*z^4-4*u^4*v*z^4-10*u^3*v^2*z^4+2*u^2*v^3*z^
4+11*u*v^4*z^4+5*v^5*z^4-u^3*v*z^5-3*u^2*v^2*z^5-3*u*v^3*z^5
-v^4*z^5}}
-- m0=matrix {{-2*u*v^4*z^4+u^4*v^5+12*u^4*v^3*z^2+12*u^2*v^
4*z^3-u^3*v*z^5+11*u^3*v^2*z^4-21*u^3*v^3*z^3-4*u^4*v*z^4+2*
u^4*v^2*z^3-6*u^4*v^4*z+u^5*z^4-3*u^5*v^2*z^2+u^5*v^3*z-3*u*
v^5*z^3-2*u^2*v^3*z^4+u^3*v^4*z^2+v^5*z^4}}
-- m0=matrix {{1251*v^4*z^3+5184*u*v^3*z^3+5354*u^2*v^2*z^3+
115*u^4*z^3-9552*u*v^4*z^2-22496*u^2*v^3*z^2-5424*u^3*v^2*z^
2-32*115/23*u^4*v*z^2+192*115*u^2*v^4*z+17472*u^3*v^3*z-1382
4*u^3*v^4}}
-- adjs(m0)

```

## 28.2 Berechnung des adjungierten Ideals aus einer Ganzheitsbasis

Die folgende Funktion berechnet mit dem Verfahren aus Abschnitt 11.1 das adjungierte Ideal für eine ebene projektive Kurve:

```

-- Berechnet das adjungierte Ideal einer ebenen Kurve vom Grad n
-- aus einer Ganzheitsbasis
-- Voraussetzungen für den Aufruf:
-- K=QQ
-- R=K[v,u]
-- QR=frac(R)
-- Input:
-- 1. Stelle: Ideal der Kurve, dieses Ideal muss ein
-- Ideal in R sein
-- 2. Stelle: Ganzheitsbasis in einer 1xn-Matrix aus QR
-- Output:
-- minimale Erzeuger des adjungierten Ideals
--
--
adjib=method()
adjib(Ideal,Matrix):=(I,ib)->(
n=(degree (gens I)-(0,0))#0;

```

```

A=R/I;
QRx=frac(K[u]);
matnum(Matrix):=(ibmm)->(q=0;ibl={};while q<rank(source(ibmm
)) do (ibl=append(ibl,numerator ibmm_(0,q));q=q+1);matrix {i
bl});
matden(Matrix):=(ibmm)->(q=0;ibl={};while q<rank(source(ibmm
)) do (ibl=append(ibl,denominator ibmm_(0,q));q=q+1);matrix
{ibl});
rmodA(Matrix):=(ibm)->(q=0;num=matnum(ibm);den=matden(ibm);r
snum=substitute(substitute(num,A),R);q=0;ibl={};while q<rank
(source(ibm)) do (ibl=append(ibl,rsnum_(0,q)/den_(0,q));q=q+
1);rs=matrix {ibl};rs);
matdiv(List):=(ibm)->(q=0;ibl={};while q<rank(source(ibm#0))
do (ibl=append(ibl,(ibm#0)_(0,q)/(ibm#1)_(0,q));q=q+1);rs=m
atrix {ibl});
cancelm(Matrix):=(ibm)->(qa=0;lis={};while qa<rank(source(ib
m)) do (lis=append(lis,(entries(matdiv({matnum(transpose ibm
_{qa}),matden(transpose ibm_{qa}))))#0);qa=qa+1);transpose
matrix lis);
mati(List):=(mai)->(nn=rank source mai#0;ali=deepSplice join
({0..(mai)#1-1},{(mai)#1+1..(nn-1)});(mai#0)_ali);
dmatij(List):=(maij)->(det transpose mati({transpose mati({m
aij#0,maij#1}),maij#2}));
inverse(Matrix):=(trmm)->(ix=0;iy=0;liy={};nn=rank source tr
mm ;dem=det trmm;while ix<nn do (liss={};iy=0;while iy<nn do
(liss=append(liss,(-1)^(iy+ix)*dmatij({trmm,ix,iy})/dem);pr
int ix;iy=iy+1);liy=append(liy,liss);ix=ix+1);matrix liy);
syminverse(Matrix):=(trmm)->(ix=0;iy=0;liy={};nn=rank source
trmm ;dem=det trmm;while ix<nn do (liss={};iy=0;while iy<nn
do (if iy<ix then liss=append(liss,(liy#iy)#ix);if iy>ix-1
then liss=append(liss,(-1)^(iy+ix)*dmatij({trmm,ix,iy})/dem)
;print ix;iy=iy+1);liy=append(liy,liss);ix=ix+1);matrix liy)
;
RE=QRx[v,a];
input ''fadjtt5'';
input ''fadjttt5'';
interadj
)
--
--
-- Beispiel:
K=QQ
R=K[v,u]
-- I=ideal matrix {{v^4-2*u^3+3*u^2-2*v^2}}
-- I=ideal(u^5+3*u^4+3*u^3+u^2-v^5)
I=ideal(u^7+4*u^6+6*u^5+4*u^4+u^3-v^7)
QR=frac(R)
-- ib=matrix {{1, v, (-1+v^2)/(-1+u), 1/(-1+u)/u*v^3+(-2+u)/(-1+u)/u*v}}
-- ib=matrix {{1, v, v^2/(u+1), 1/(u+1)/u*v^3, 1/(u+1)^2/u*v^4}}
ib=matrix {{1, v, v^2/(u+1), 1/(u+1)/u*v^3, 1/(u+1)^2/u*v^4,

```

```

1/(u+1)^2/u^2*v^5, 1/(u+1)^3/u^2*v^6}}
adjib(I,ib)
Die Funktion ruft folgende Skripten auf:
fadjtt5:
gl=substitute(ib,RE)
perm=(entries(matrix({deepSplice({-(n-1)..0})})*-1))#0
mR=((coefficients(transpose gl))#1)_perm
mRI=(substitute(mR,QRx))^-1
trmat(List):=(lis)->(ibmn=numerator(ib_(0,lis#0))*numerator(ib_(0,lis#1))
*matnum(ib);ibmd=denominator(ib_(0,lis#0))*denominator(ib_(0,lis#1))*
matden(ib);rsn=substitute(substitute(ibmn,A),R);rs=matdiv({rsn,ibmd})
;gl=substitute(rs,RE);mB=((coefficients(transpose gl))#1)_perm
;mA=(substitute(mR,QRx))^-1*substitute(mB,QRx);mA)
trac(List):=(lis)->(mB=substitute(((coefficients(transpose
substitute(matdiv({substitute(substitute(numerator(ib_(0,lis#0))
*numerator(ib_(0,lis#1))*matnum(ib),A),R),denominator(ib_(0,lis#0))
*denominator(ib_(0,lis#1))*matden(ib)}),RE)))#1)_perm,QRx);tra=mRI_(0,0)
*mB_(0,0);qj=1;while qj<n do (qz=0;while qz<qj+1 do
(tram=tra+mRI_(qj,qz)*mB_(qz,qj);qz=qz+1);qj=qj+1);tra)
bup=openOut ''adjtt.txt''
sy=0
while sy<n do (lix={},sx=0,while sx<n do (if sx<sy then trv=0
;if sx==sy then trv=1/2*trac({sx,sy});if sx>sy then
trv=trac({sx,sy});lix=append(lix,trv);print sy;sx=sx+1)
;bup<<'liy''<<sy<<'='<<(name lix)<<endl;sy=sy+1)
bup<<'trmw=matrix {''
q=0
while (q<(n-1)) do (bup<<'liy''<<q<<'','';q=q+1)
bup<<'liy''<<(n-1)<<'','''<<endl
bup<<'trmw=trmw+transpose(trmw)''<<endl
close bup
ffadjtt5:
dfdvs=substitute((diff(vars R, gens I))_(0,0),QR)
-- berechne LR Zerlegung von trm
-- Permutationsvektor
prmt=matrix {deepSplice({0..(n-1)})}
pivot(ZZ):=(spa)->(qu=k;del={};while qu<n do (if (trmw_(qu,spa)
pa)==0) then del=append(del,infinity);if (trmw_(qu,spa)!=0)
then del=append(del,(degree numerator trmw_(qu,spa))#0);qu=q
u+1);k+maxPosition((-1)*del))
permut(List):=(lip)->(kl=lip#0,r1=lip#1;perm=join(0..(min({k
l,r1})-1),(max {kl,r1})..(max {kl,r1}),(min({kl,r1})+1)..(ma
x({kl,r1})-1),(min {kl,r1})..(min {kl,r1}),(max({kl,r1})+1).
.(n-1));transpose (transpose trmw)_(deepSplice({perm})))
funk(List):=(lij)->(otp=trmw_(lij#0,lij#1);if ((lij#0>k) and
(lij#1==k)) then otp=(trmw_(lij#0,lij#1))/trmw_(k,k);if ((l
ij#0>k) and (lij#1>k)) then otp=(trmw_(lij#0,lij#1))-(trmw_(
k,lij#1))*(trmw_(lij#0,k))/trmw_(k,k);otp)
k=0

```

```

while k<(n-1) do (r=pivot(k);print k;if r!=k then (trmw=perm
ut({k,r});prmt=prmt_(deepSplice({perm})));trmw=matrix(table(
n,n,(i,j)->funk({i,j})));k=k+1)
funkL(List):=(lijj)->(otp=0;if lijj#0>lijj#1 then otp=trmw_(
lijj#0,lijj#1);otp)
funkR(List):=(lijj)->(otp=0;if lijj#0<=lijj#1 then otp=trmw_(
lijj#0,lijj#1);otp)
exR(ZZ):=(wom)->(matrix(table(n,n,(i,j)->funkR({i,j}))))
exL(ZZ):=(wom)->(id_(QR^n)+matrix(table(n,n,(i,j)->funkL({i
,j}))))
Pm=transpose (id_(QR^n))-((entries prmt)#0)
ibr=Pm*(transpose rmodA(dfv*ib))
rst={ibr_(0,0)}
i=1
while i<n do (rstt=ibr_(i,0);j=0;while j<i do (print i;rstt=
rstt-substitute(trmw_(i,j),QR)*rst#j;j=j+1);rst=append(rst,r
stt);i=i+1)
ze=matrix {rst}
rst={ze_(0,n-1)/substitute(trmw_(n-1,n-1),QR)}
i=n-2
while i>-1 do (rstt=ze_(0,i);j=i+1;while j<n do (print j;rst
t=rstt-substitute(trmw_(i,j),QR)*rst#(n-1-j);j=j+1);rstt=rst
t/substitute(trmw_(i,i),QR);rst=append(rst,rstt);i=i-1)
adjb=substitute(matrix {rst},R)
adj=mingens ideal adjb
Rx=K[u,v,z]
interadj=homogenize(substitute(adj,Rx),z)
m0=homogenize(substitute(gens I,Rx),z)

```

### 28.3 Berechnung des adjungierten Ideals aus der freien Auflösung des Jacobiideals

Die folgende Funktion berechnet mit dem Verfahren aus Abschnitt 11.3 das adjungierte Ideal für eine ebene projektive Kurve mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten:

```

-- Funktion: adjres
-- Berechnet minimale Erzeuger des adjungierten Ideals für
-- eine ebene rationale Kurve mit nur gewöhnlichen Doppelpunkten
-- mit Hilfe einer freien Auflösung des Jacobiideals
-- Parameter: Matrix mit der Gleichung der Kurve
--
adjres=method()
adjres(Matrix):=(m0)->(
Jf:=quote Jf;
cc:=quote cc;
ke:=quote ke;
Jf=diff(vars ring m0,m0);
cc=res ideal Jf;
RJf=(ring m0)/(ideal Jf);

```

```

m3n=transpose gens trim image transpose matrix
entries cc.dd.3;
mnn=gens trim image m3n;
iadj=ideal mingens ideal syz(substitute(mnn,RJf)
,DegreeLimit=>n-1);
substitute(mingens iadj,ring m0)
)
-----
-- folgende Funktion verwendet die alternative Methode:
--
adjres2=method()
adjres2(Matrix):=(m0)->(
Jf:=quote Jf;
cc:=quote cc;
ke:=quote ke;
Jf=diff(vars ring m0,m0);
Rfj=Rx/ideal Jf;
ne2=gens trim image gens trim image substitute(syz Jf,Rfj);
adj=mingens ideal substitute(mingens minors(n-2,syz ne2),Rx)
)
--
--
--
-- Beispiel:
- K=QQ
- Krd=ZZ/3
- Srd=Krd[s,t]
- S=K[s,t]
- Rx=K[u,v,z]
- n=7
- m0=substitute(random (Srd^{0},Srd^{-n,-n,-n}),S)
- ff=map(S,Rx,m0)
- ie=ker ff
- adjres(mingens ie)

```

## 29 Suche eines rationalen Punktes auf einer Konik

Folgende Maple-Funktion *rpt* testet für eine (irreduzible) Konik

$$a*y_0^2+b*y_0*y_1+c*y_1^2+d*y_0*y_2+e*y_1*y_2+f*y_2^2=0$$

ob ein rationaler Punkt existiert und findet einen solchen, falls er existiert.

*rpt* ruft die Funktionen *Jval*, *rtpt* und *nrm* auf.

```

readlib(isqrfree):
readlib(numtheory):
Jval:=proc(a,b,c)
local rt;
if (a<=b and b<=c) then rt:=b fi;
if (a<=c and c<=b) then rt:=c fi;
if (b<=a and a<=c) then rt:=a fi;
if (b<=c and c<=a) then rt:=c fi;

```

```

if (c<=a and a<=b) then rt:=a fi;
if (c<=b and b<=a) then rt:=b fi;
rt
end:
rtpt:=proc(bb,cc)
local tlr,hn,rtt,rtrans,jl,bk,alpha,beta,gammaa,ueberq4,i,
sqrfac,anzfac,sqfpb,bbsq,sqfpc,fact,expo,ccsq,R1,R2,R3,aaa,
bbb,ccc,gt,ueberq,ueberq2,ueberq3,r1,A,B,C,Q;
ueberq:=y_0^2+bb*y_1^2+cc*y_2^2;
sqrfac:=isqrfree(bb);
anzfac:=nops(sqrfac[2]);
sqfpb:=sqrfac[1];
for i from 1 to anzfac do
fact:=sqrfac[2][i][1];
expo:=sqrfac[2][i][2];
sqfpb:=expand(sqfpb*fact^(expo mod 2))
od;
bbsq:=sqrt(abs(bb/sqfpb));
rtrans:=[y_0,y_1,y_2];
sqrfac:=isqrfree(cc);
anzfac:=nops(sqrfac[2]);
sqfpc:=sqrfac[1];
for i from 1 to anzfac do
fact:=sqrfac[2][i][1];
expo:=sqrfac[2][i][2];
sqfpc:=expand(sqfpc*fact^(expo mod 2))
od;
bbsq:=sqrt(abs(bb/sqfpb));
ccsq:=sqrt(abs(cc/sqfpc));
ueberq2:=subs(y_1=y_1/bbsq,y_2=y_2/ccsq,ueberq);
rtrans:=[rtrans[1],rtrans[2]/bbsq,rtrans[3]/ccsq];
gt:=gcd(sqfpb,sqfpc);
aaa:=gt;bbb:=sqfpb/gt;ccc:=sqfpc/gt;
ueberq3:=1/gt*subs(y_0=y_0*gt,ueberq2);
rtrans:=[rtrans[1],rtrans[2]/gt,rtrans[3]/gt];
while Jval(abs(aaa*bbb),abs(aaa*ccc),abs(bbb*ccc))>1 do
while abs(aaa)>abs(bbb) or abs(bbb)>abs(ccc) do
if abs(aaa)>abs(bbb) then
bk:=aaa;
aaa:=bbb;
bbb:=bk;
rtrans:=subs(y_0=t_0,y_1=t_1,rtrans);
rtrans:=subs(t_0=y_1,t_1=y_0,rtrans);
fi;
if abs(bbb)>abs(ccc) then
bk:=bbb;
bbb:=ccc;
ccc:=bk;
rtrans:=subs(y_1=t_1,y_2=t_2,rtrans);
rtrans:=subs(t_1=y_2,t_2=y_1,rtrans);

```

```

fi;
od;
R1:=numtheory[msqrt](-aaa*bbb,abs(ccc));
R2:=numtheory[msqrt](-aaa*ccc,abs(bbb));
R3:=numtheory[msqrt](-bbb*ccc,abs(aaa));
if (R1=FAIL or R2=FAIL or R3=FAIL) then RETURN(FAIL) fi;
r1:=R1/aaa mod ccc;
if r1>0 and abs(2*r1)>abs(ccc) then
  r1:=r1-(round(abs(r1/ccc))*abs(ccc))
fi;
if r1<0 and abs(2*r1)>abs(ccc) then
  r1:=r1+(round(abs(r1/ccc))*abs(ccc))
fi;
Q:=(aaa*r1^2+bbb)/ccc;
if Q=0 then
  print(aaa,bbb,ccc,1);
  rtrans:=subs(y_0=1,y_1=1,y_2=0,rtrans);
  hn:=lcm(lcm(denom(rtrans[1]),denom(rtrans[2])),denom(rtrans[3]));
  rtrans:=rtrans*hn;
  tlr:=gcd(gcd(rtrans[1],rtrans[2]),rtrans[3]);
  RETURN(rtrans/tlr)
fi;
A:=gcd(gcd(aaa*r1^2,bbb),ccc*Q);
alpha:=r1/A;
beta:=bbb/A;
B:=aaa*beta;
sqrfac:=isqrfree(Q/A);
anzfac:=nops(sqrfac[2]);
C:=sqrfac[1];
for i from 1 to anzfac do
  fact:=sqrfac[2][i][1];
  expo:=sqrfac[2][i][2];
  C:=expand(C*fact^(expo mod 2))
od;
gammaa:=sqrt(abs(Q/A/C));
rtrans:=subs(y_0=A*alpha*t_0-beta*t_1,y_1=t_0+aaa*alpha
*t_1,y_2=C*gammaa*t_2,rtrans);
rtrans:=subs(t_0=y_0,t_1=y_1,t_2=y_2,rtrans);
ueberq4:=A*y_0^2+B*y_1^2+C*y_2^2;
print(aaa,bbb,ccc,Jval(abs(aaa*bbb),abs(aaa*ccc),
abs(bbb*ccc)));
aaa:=A;bbb:=B;ccc:=C
od;
if sign(aaa)=-sign(bbb) then rtt:=subs(y_0=1,y_1=1,y_2=0,
rtrans) fi;
if sign(aaa)=-sign(ccc) then rtt:=subs(y_0=1,y_1=0,y_2=1,
rtrans) fi;
if sign(bbb)=-sign(ccc) then rtt:=subs(y_0=0,y_1=1,y_2=1,
rtrans) fi;
hn:=lcm(lcm(denom(rtt[1]),denom(rtt[2])),denom(rtt[3]));

```

```

rtt:=rtt*hn;
tlr:=gcd(gcd(rtt[1],rtt[2]),rtt[3]);
rtt/trl
end:
rpt:=proc(ueber)
local cs,fs,ds,bs,as,ak,ck,dk,ek,pkt,tpkt,hn,tlr,a,b,c,
d,e,f,teilerc,uebers,nr,uebers2,rtrans,N,di,jj,ll,ueberdh1,
ueberdh2,aa,bb,cc;
a:=coeff(ueber,y_0^2);
b:=coeff(coeff(ueber,y_0),y_1);
c:=coeff(ueber,y_1^2);
d:=coeff(coeff(ueber,y_0),y_2);
e:=coeff(coeff(ueber,y_1),y_2);
f:=coeff(ueber,y_2^2);
teilerc:=lcm(lcm(lcm(lcm(lcm(denom(f),denom(e)),denom(d)),
denom(c)),denom(b)),denom(a));
uebers:=ueber*teilerc;
a:=a*teilerc;
b:=b*teilerc;
c:=c*teilerc;
d:=d*teilerc;
e:=e*teilerc;
f:=f*teilerc;
nr:=-1;
rtrans:=[y_0,y_1,y_2];
if (b^2=4*a*c) then
nr:=0;
uebers2:=uebers;
if c=0 then
rtrans:=[-d/2/a*e,-(4*a*f-d^2)/4/a,e];
rtrans:=nrm(rtrans);
RETURN(nrm(rtrans))
fi;
if c<>0 then
fs:=4*c*f-e^2;
ds:=4*c*d-2*b*e;
rtrans:=[-fs,-e*ds/2/c+b/2/c*fs,ds];
RETURN(nrm(rtrans))
fi;
fi;
if (d^2=4*a*f) then
nr:=1;
uebers2:=uebers;
if f=0 then
rtrans:=[-b/2/a*e,e,-(4*a*c-b^2)/4/a];
RETURN(nrm(rtrans))
fi;
if f<>0 then
cs:=4*f*c-e^2;
bs:=4*f*b-2*d*e;

```

```

rtrans:=[-cs,bs,-e*bs/2/c+d/2/f*cs];
RETURN(nrm(rtrans))
fi;
fi;
if (e^2=4*f*c) then
nr:=2;
uebers2:=uebers;
if c=0 then
rtrans:=[b,-(4*a*f-d^2)/4/f,-d/2/f*b];
RETURN(nrm(rtrans))
fi;
if c<>0 then
as:=4*c*a-b^2;
ds:=4*c*d-2*b*e;
rtrans:=[ds,-b*ds/2/c+e/2/c*as,-as];
RETURN(nrm(rtrans))
fi;
fi;
N:=4*d*e-4*b*f;
di:=4*a*c-b^2;
jj:=4*c^2*d^2-4*b*c*d*e+4*a*c*e^2+4*b^2*c*f-16*a*c^2*f;
if a=0 and c=0 then
rtrans:=subs(y_0=(t_0+t_1-2*e*y_2)/2/b,y_1=(t_0-t_1-2*d
*y_2)/2/b,rtrans);
rtrans:=subs(t_0=y_0,t_1=y_1,rtrans);
aa:=1;
bb:=-1;
cc:=-N;
fi;
if a<>0 and c=0 then
rtrans:=[rtrans[2],rtrans[1],rtrans[3]];
uebers2:=subs(y_0=t_0,y_1=t_1,uebers);
uebers2:=subs(t_0=y_1,t_1=y_0,uebers2);
ak:=a;
ck:=c;
dk:=d;
ek:=e;
a:=ck;
c:=ak;
e:=dk;
d:=ek;
fi;
if c<>0 then
ueberdh1:=subs(y_1=(1/(2*c))*y_1-(1/(2*c))*e*y_2-
(1/(2*c))*b*y_0,uebers2);
ueberdh2:=subs(y_0=((1/di)*y_0-2*d*c/di*y_2+b*e/di*y_2)
,4*c*di*ueberdh1);
rtrans:=subs(y_1=(1/(2*c))*y_1-(1/(2*c))*e*y_2-(1/(2*c))
*b*y_0,rtrans);
rtrans:=subs(y_0=((1/di)*y_0-2*d*c/di*y_2+b*e/di*y_2),

```

```

rtrans);
aa:=1;
bb:=di;
cc:=-jj;
fi;
if sign(aa)=sign(bb) and sign(bb)=sign(cc) then
RETURN(FAIL) fi;
pkt:=rtpt(bb,cc);
if pkt=FAIL then RETURN(FAIL) fi;
tpkt:=subs(y_0=pkt[1],y_1=pkt[2],y_2=pkt[3],rtrans);
nrm(tpkt)
end:
nrm:=proc(tpkt)
local hn,tlr,tpkt1;
hn:=lcm(lcm(denom(tpkt[1]),denom(tpkt[2])),denom(tpkt[3]));
tpkt1:=tpkt*hn;
tlr:=gcd(gcd(tpkt1[1],tpkt1[2]),tpkt1[3]);
tpkt1/tlr
end:

```

## 30 Parametrisierungsverfahren ausgehend vom adjungierten Ideal

### 30.1 Transformation auf eine rationale Normkurve und Bestimmung eines $g_1^1$

Im folgenden wird das Parametrisierungsverfahren aus Abschnitt 19 implementiert. Die Funktionen in diesem Abschnitt rufen die Funktion *optpar* aus Abschnitt 31 auf.

#### 30.1.1 Birationale Transformation auf eine rationale Normkurve mit einem $g_{n-2}^{n-2}$

```

--
-- Funktion rnc:
-- Berechnet zu einer ebenen rationalen Kurve C vom Grad n
-- eine birational aequivalente rationale Normkurve
-- im  $P^{(n-2)}$ 
--
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom
-- Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
-- adjungierten Ideals stehen
--
-- Ausgabe: Ideal der rationalen Normkurve im Ring
--  $K[x_0 \dots x_{(n-2)}]$ 
--
rnc:=method()
rnc(Matrix,Matrix):=(m0,interadj)->(

```

```

n:=quote n;
ie:=quote ie;
KR:=quote KR;
m:=quote m;
linsys:=quote linsys;
phi:=quote phi;
Rx:=ring m0;
n=(degree(m0_(0,0)))#0;
ie=ideal m0;
KR=Rx/(ideal(m0));
linsys=substitute(interadj,KR);
m=n-2;
R=K[x_0..x_m];
phi=map(KR,R,linsys);
gens ker phi)

```

### 30.1.2 Berechnung einer Folge von isomorphen rationalen Normkurven und den entsprechenden Isomorphismen

```

-- Funktion rncls
-- Berechnet aus einer rationalen Normkurve RNC im P^m
-- eine Liste von rationalen Normkurven und birationalen
-- Transformationen zwischen den rationalen Normkurven,
-- wobei die letzte der P^1 ist fuer m ungerade
-- oder eine Konik im P^2 fuer m gerade
--
-- Parameter: Ideal der RNC
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 1.Stelle der Liste: eine Liste der Ideale der rationalen
--                       Normkurven
-- 2.Stelle der Liste: eine Liste der birationalen
--                       Transformationen zwischen den rationalen
--                       Normkurven
--
rncls=method()
rncls(Ideal):=(i1)->(
ngl:=quote ngl;
n:=quote n;
ngll:=quote ngll;
htrl:=quote htrl;
m4:=quote m4;
htr:=quote htr;
fr:=quote fr;
ia:=quote ia;
cc:=quote cc;
fr:=quote fr;
gte:=quote gte;
lsy:=quote lsy;
ngl=mingens i1;

```

```

n=(rank source vars ring i1)-1;
ngll={};
htrl={};
gte=1;
while ((n>1) and (gte==1)) do (
Ra=K[(entries (vars ring i1)_{0..n})#0];
Rb=K[y_0..y_{(n-2)}];
ia=ideal(substitute(ngl,Ra));
cc=res coker gens ia;
j=length cc;
m4=cc.dd_j;
Sca=Ra/ia;
htr=gens(ker(substitute(m4,Sca)));
q=0;
mmm=10^20;
while q<(rank source trm) do (
qq=0;
mon=0;
while qq<(rank target trm) do (
cf=flatten (coefficients trm_(qq,q))#1;
no=(entries substitute(cf*transpose cf,QQ))#0#0;
mo=(numerator no)*(denominator no);
if mo>mon then mon=mo;
qq=qq+1);
if mon<mmm then (mmm=mon;cod=q);
q=q+1);
cod=0;
lsy=matrix entries transpose htr_{cod};
fr=map(Sca,Rb,lsy);
ngl=mingens ker fr;
ngll=append(ngll,ngl);
htrl=append(htrl,substitute(transpose lsy,ring i1));
ngl=substitute(ngl,(vars Ra)_{0..(n-2)});
n=n-2;
if n==2 then gte=0);
if ((rank source vars ring i1)-1)==2 then otp={{0},{0}} else
otp={ngll,htrl};
otp)

```

### 30.1.3 Berechnung eines $g_2^2$ bzw. eines $g_1^1$ und Berechnung einer Parametrisierung über einer Konik bzw. dem $\mathbb{P}^1$

---

```

-- Funktion lsp:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C vom Grad n und
  gegebene Erzeuger
-- des adjungierten Ideals eine Parametrisierung ueber P^1
-- fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
-- ausgehend von einer birationalen Transformation C->RNC1

```

```

-- und einer Liste von birationalen Transformationen von
-- rationalen Normkurven:
-- RNC1->...->RNCx, wobei für n gerade RNCx einer Konik im
-- P^2 ist und fuer n ungerade der P^1 (diese Liste wird von
-- der Funktion rncls erzeugt)
--
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom
-- Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
-- adjungierten Ideals stehen
-- (und damit die birationale Transformation
-- C->RNC1)
-- 3.Parameter: obige Liste von birat. Transf. von
-- rationalen Normkurven
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer 3x1-
-- Matrix ueber P^1 fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste: Gleichung der Konik fuer n gerade
-- sonst 0
-- 2.Stelle der Liste: birationale Transformation C->P^1 bzw.
-- C->Konik
--
lsp=method()
lsp(Matrix,Matrix,List):=(m0,interadj,htr1)->(
m:=quote m;
anztr:=quote anztr;
s1:=quote s1;
s2:=quote s2;
ug:=quote ug;
trans:=quote trans;
uvz:=quote uvz;
linsyspar:=quote linsyspar;
linpar:=quote linpar;
q:=quote q;
ri:=quote ri;
cu:=quote cu;
tttmat:=quote tttmat;
tttid:=quote tttid;
ttid:=quote ttid;
graid:=quote graid;
ma1:=quote ma1;
uvz:=quote uvz;
pp:=quote pp;
mm:=quote mm;
ilngl:=quote ilngl;
iltr:=quoteiltr;
nglm:=quote nglm;
mx:=quote mx;

```

```

mdn:=quote mdn;
transfor:=quote transfor;
rdsat2:=quote rdsat2;
m=(rank source interadj)-1;
if m>2 then xvar:=(entries(vars ring htrl#0))#0;
if m<=2 then xvar={};
R2:=K[xvar,y_0..y_m];
if denominator(m/2)==1 then trans=transpose substitute(matrix
x {{y_0..y_2}},R2);
if denominator(m/2)!=1 then trans=transpose substitute(matrix
x {{y_0,y_1}},R2);
anztr=#htrl;
i=0;
ug=2-denominator(m/2);
if m>2 then (
while (i<anztr) do (
s1=htrl#(anztr-i-1);
s2=substitute(s1,R2);
q=0;
while (q<2+ug+2*i) do (trans=substitute(trans,{y_q=>s2_(q,0)
}),q=q+1);
i=i+1;
q=0;
while (q<2+ug+2*i) do (trans=substitute(trans,{xvar#q=>y_q})
,q=q+1);
));
uvz=(entries vars ring interadj)#0;
Rpar:=K[uvz,y_0..y_m];
linsyspar=substitute(interadj,Rpar);
linpar=substitute(trans,Rpar);
q=0;
while (q<m+1) do (linpar=substitute(linpar,{y_q=>linsyspar_(
0,q)},q=q+1);
Rl:=K[uvz,y_0..y_(1+ug)];
ri=substitute(mingens ideal linpar,Rl);
Krd=ZZ/11;
rdsat2=substitute(random(Krd^(2+ug),Krd^(1)),Rl);
ris=ri*rdsat2;
cu=substitute(m0,Rl);
tttmat=matrix append(entries ri,(entries substitute(vars(K[y
_0..y_(1+ug)]),Rl))#0);
tttid=minors(2,tttmat);
ttid=ideal matrix {append((entries gens tttid)#0,cu_(0,0))};
graid=saturate(ttid,ideal ris);
ma1=gens graid;
testll(List):=(elem)->(di=diff(substitute(matrix vars Rx,Rl)
,elem#0);if ((substitute(di,{u=>0,v=>0,z=>0})==di) and (di!=
0)) then true else false);
pp=0;
ilngl={};

```

```

iltr={};
while (pp<rank source ma1) do (if substitute(ma1_{pp},{u=>0,
v=>0,z=>0})==ma1_{pp} then ilngl=append(ilngl,pp);pp=pp+1);
pp=0;
while (pp<rank source ma1) do (tesg=testll({ma1_(0,pp)});if
tesg==true then iltr=append(iltr,pp),pp=pp+1);
mm=ma1_iltr;
nglm=ma1_ilngl;
mx=substitute(matrix {uvz},R1);
mdn=diff(mx,transpose mm);
if denominator(m/2)!=1 then transfor=gens ker mdn;
Ry=K[y_0..y_(1+ug)];
if denominator(m/2)==1 then Sngl=Ry/(ideal substitute(nglm,R
y));
if denominator(m/2)==1 then transfor=gens ker substitute(mdn
,Sngl);
{substitute(transfor,Ry),substitute(nglm,Ry),substitute(linp
ar,ring interadj)}
--
-----
--
-- Funktion testpar:
-- Testet für eine rationale Kurve C=V(m0), ob für deg(m0)
-- ungerade eine gegebene
-- birationale Transformation P1->C wirklich eine
-- Parametrisierung ist und für deg(m0) gerade, ob eine
-- gegebene birat. Transf. von einer Konik C2 nach C eine
-- Parametrisierung von C ueber C2 ist
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung einer ebenen
-- rationalen Kurve steht
-- 2.Parameter: Parametrisierung der Kurve in einer
-- 3x1-Matrix über dem P1 für deg(m0) ungerade
-- oder Parametrisierung der Kurve in einer
-- 3x1-Matrix über einer Konik für deg(m0) gerade
-- 3.Parameter: Gleichung der Konik (für deg(m0) ungerade
-- irrelevant)
--
-- Ausgabe: eine Nullmatrix falls die birat. Transf. eine
-- Parametrisierung war
--
testpar=method()
testpar(Matrix,Matrix,Matrix):=(m0,paraopt,ueber)->(
uvz:=quote uvz;
transfor:=quote transfor;
test:=quote test;
uvz=(entries vars ring m0)#0;
R1:=K[uvz,(entries vars ring paraopt)#0];
transfor=substitute(paraopt,R1);
test=substitute(substitute(m0,R1),{(uvz#0)=>transfor_(0,0),(
uvz#1)=>transfor_(1,0),(uvz#2)=>transfor_(2,0)});

```

```

if ueber!=0 then Scn:=Rl/ideal(substitute(ueber,Rl));
if ueber!=0 then test=substitute(test,Scn);
test)
--
-----
--
-- Funktion par:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C vom Grad n und
-- gegebene Erzeuger des adjungierten Ideals eine
-- Parametrisierung ueber P1 fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
--
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom
-- Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
-- adjungierten Ideals stehen
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer
-- 3x1-Matrix ueber P1 fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste:
-- Gleichung der Konik fuer n gerade sonst 0
-- 2.Stelle der Liste: birationale Transformation C->P1 bzw.
-- C->Konik
--
par=method()
par(Matrix,Matrix):=(m0,interadj)->(
i1=quote i1;
htrl:=quote htrl;
paragl:=quote paragl;
para:=quote para;
ueber:=quote ueber;
paraopt:=quote paraopt;
m:=quote m;
i1=ideal rnc(m0,interadj);
m=(degree m0_(0,0))#0-2;
if m==2 then htrl={{0},{0}} else htrl=(rncls(i1))#1;
paragl=lsp(m0,interadj,htrl);
paragl)
--
-----
--
-- Funktion otpar:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C
-- vom Grad n und
-- gegebene Erzeuger des adjungierten Ideals eine
-- Parametrisierung ueber P1 fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
-- optimiert fuer n ungerade diese Parametrisierung

```

```

-- und testet die Parametrisierung
--
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C
-- vom Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
-- adjungierten Ideals stehen
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer
-- 3x1-Matrix ueber P1 fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste:
-- Gleichung der Konik fuer n gerade sonst 0
-- 2.Stelle der Liste: Test der Parametrisierung:
--      0-Matrix falls OK
--
otpar=method()
otpar(Matrix,Matrix):=(m0,interadj)->(
i1=quote i1;
htrl:=quote htrl;
paragl:=quote paragl;
para:=quote para;
ueber:=quote ueber;
paraopt:=quote paraopt;
m:=quote m;
i1=ideal rnc(m0,interadj);
htrl=(rncls(i1))#1;
paragl=lsp(m0,interadj,htrl);
para=paragl#0;
ueber=paragl#1;
print para;
m=(degree m0_(0,0))#0-2;
if denominator(m/2)==1 then paraopt=para;
if denominator(m/2)!=1 then paraopt=optpar(para,ring para);
test=testpar(m0,paraopt,ueber);
{paraopt,ueber,test})
--
-----
--
-- Beispiel:
-- K=QQ
-- Rx=K[u,v,z]
-- m0=matrix {{14440*u^5-16227*u^4*v+10812*u^3*v^2-13533*u^2
*v^3+3610*u*v^4+1805*v^5+14440*u^4*z-18032*u^3*v*z+16218*u^2
*v^2*z-12626*u*v^3*z+3610*v^4*z+3610*u^3*z^2-4508*u^2*v*z^2+
5406*u*v^2*z^2-2703*v^3*z^2}}
-- interadj=(adjs(m0))#1
-- otpar(m0,interadj)
-- par(m0,interadj)

```

### 30.1.4 Parametrisierung von Koniken

```

-- Funktion: conicpar
--
-- Parametrisiert eine ebene irred. projektive Konik
--
-- Input:
-- 1. Stelle: Punkt auf der Konik in einer 1x3-Matrix
--           ueber ZZ
-- 2. Stelle: Gleichung der Konik in einer 1x1-Matrix mit
--           Koeffizienten in QQ
-- 2. Stelle: Polynomring ueber QQ mit 2 Variablen, die die
--           Parameter der Parametrisierung der Konik
--           sein sollen
-- Output:
-- Parametrisierung der Konik in einer 1x3-Matrix in dem Ring
-- der an der 2. Stelle des Inputs uebergeben wurde
--
--
conicpar=method()
conicpar(Matrix,Matrix,Ring):=(pktc,ueber,Rpar)->(
perm:=quote perm;
Rcp:=quote Rcp;
Rcp=(ring ueber)**Rpar;
Ra:=ring ueber;
rv:=(entries(substitute(vars Rpar,Rcp)))#0;
yv:=(entries(substitute(vars ring ueber,Rcp)))#0;
perm={0,1,2};
if pktc_(0,0)==0 and pktc_(0,1)!=0 then (
pktc=pktc_{1,0,2};
ueber=substitute(ueber,{(vars Ra)_(0,0)=>(vars Ra)_(0,1),(va
rs Ra)_(0,1)=>(vars Ra)_(0,0)});
perm={1,0,2}
);
if pktc_(0,0)==0 and pktc_(0,2)!=0 then (
pktc=pktc_{2,1,0};
ueber=substitute(ueber,{(vars Ra)_(0,0)=>(vars Ra)_(0,2),(va
rs Ra)_(0,2)=>(vars Ra)_(0,0)});
perm={2,1,0}
);
mlts:=matrix {{-pktc_(0,1)*rv#0*yv#0-pktc_(0,2)*rv#1*yv#0+pk
tc_(0,0)*rv#0*yv#1+pktc_(0,0)*rv#1*yv#2}};
mtr:=matrix {{(substitute(ueber,Rcp))_(0,0),mlts_(0,0)}};
mg:=mingens ideal mtr;
ibp:=ideal(yv#0*pktc_(0,1)-yv#1*pktc_(0,0),yv#0*pktc_(0,2)-y
v#2*pktc_(0,0),yv#1*pktc_(0,2)-yv#2*pktc_(0,1));
trf:=(mingens saturate(ideal mg,ibp))_{0,1};
trfm:=diff(matrix {{yv#0,yv#1,yv#2}},transpose trf);
copar1=transpose gens ker trfm;
copar1=copar1_perm;

```

```

substitute(copar1,Rpar)
)
--
--
-- Beispiel:
K=QQ
Rpar=K[r_0,r_1]
Ry=K[y_0,y_1,y_2]
ueber=matrix {{y_0^2+1432801/568141*y_0*y_1-48806/568141*y_1
^2-111119562684/182111347999*y_0*y_2+20623467408/18211134799
9*y_1*y_2+41120938700/182111347999*y_2^2}}
pkty2=320695554224760388035571483953331450099466859304272702
2668078070693535239532909250130763689312325027542077803468
pkty1=-59686372006752872145991479725078154427231907627167443
34692264229964076526042041621438821886510601829334327283193
pkty0=171783222739428288089083023759473033989286926688139012
37440851564687849271386148968680084152048227394470754411247
pktc=matrix {{pkty0,pkty1,pkty2}}
conicpar(pktc,ueber,Rpar)
--
--

```

## 30.2 Bestimmung einer Parametrisierung von $C$ aus einer Parametrisierung einer birational äquivalenten rationalen Normkurve

Im folgenden wird das Parametrisierungsverfahren aus Abschnitt 19.3 implementiert. Die Funktionen in diesem Abschnitt rufen die Funktionen *rnc*, *testpar* aus Abschnitt 30.1 und die Funktion *optpar* aus Abschnitt 31 auf.

### 30.2.1 Birationale Transformation auf eine rationale Normkurve mit einem $g_{n-2}^{n-2}$

Mit der Funktion *rnc* aus dem letzten Abschnitt 19.2.

### 30.2.2 Parametrisierung von rationalen Normkurven

#### Berechnung einer Folge von isomorphen rationalen Normkurven und den entsprechenden Isomorphismen

```

-- Funktion rncls2
-- Berechnet aus einer rationalen Normkurve RNC im  $P^m$ 
-- eine Liste von rationalen Normkurven und birationalen
-- Transformationen zwischen
-- den rationalen Normkurven, wobei die letzte der  $P^1$  ist
-- fuer m ungerade
-- oder eine Konik im  $P^2$  fuer m gerade
--
-- Parameter: Ideal der RNC

```

```

--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 1.Stelle der Liste: eine Liste der Ideale der rationalen
--                       Normkurven
-- 2.Stelle der Liste: eine Liste der birationalen
--                       Transformationen zwischen den
--                       rationalen Normkurven
--
rncls2=method()
rncls2(Ideal):=(i1)->(
ngl:=quote ngl;
n:=quote n;
ngll:=quote ngll;
htrl:=quote htrl;
m4:=quote m4;
htr:=quote htr;
fr:=quote fr;
ia:=quote ia;
cc:=quote cc;
fr:=quote fr;
gte:=quote gte;
lsy:=quote lsy;
ngl=mingens i1;
n=(rank source vars ring i1)-1;
ngll={};
htrl={};
gte=1;
while ((n>1) and (gte==1)) do (
Ra=K[(entries (vars ring i1)_{0..n})#0];
Rb=K[y_0..y_{n-2}];
ia=ideal(substitute(ngl,Ra));
cc=res coker gens ia;
j=length cc;
m4=cc.dd_j;
Sca=Ra/ia;
htr=gens(ker(substitute(m4,Sca)));
trm=htr;
q=0;
mmm=10^20;
while q<(rank source trm) do (
qq=0;
mon=0;
while qq<(rank target trm) do (
cf=flatten (coefficients trm_(qq,q))#1;
no=(entries substitute(cf*transpose cf,QQ))#0#0;
mo=(numerator no)*(denominator no);
if mo>mon then mon=mo;
qq=qq+1);
if mon<mmm then (mmm=mon;cod=q);
q=q+1);

```

```

cod=0;
lsy=matrix entries transpose htr_{cod};
fr=map(Sca,Rb,lsy);
ngl=mingens ker fr;
ngll=append(ngll,ngl);
htrl=append(htrl,substitute(transpose lsy,ring i1));
ngl=substitute(ngl,(vars Ra)_{0..(n-2)});
n=n-2;
if n==2 then gte=0;
ngll=join({i1},ngll);
if ((rank source vars ring i1)-1)==2 then otp={{0},{0}} else
  otp={ngll,htrl};
otp)

```

**Berechnung einer Parametrisierung der rationalen Normkurve aus der Folge von Isomorphismen -- Funktion rncpar**

```

-- Berechnet eine Parametrisierung einer rationalen
-- Normkurve im  $P^m$ 
-- für m ungerade über dem  $P^1$  für m gerade über einer Konik
-- im  $P^2$ 
-- Parameter: Ideal der rationalen Normkurve
-- Ausgabe: eine Liste
-- 1. Stelle: eine Parametrisierung der rationalen Normkurve
--           für m ungerade über dem  $P^1$  für m gerade über
--           einer Konik im  $P^2$ 
-- 2. Stelle: Gleichung der Konik für m gerade sonst 0
rncpar=method()
rncpar(Ideal):=(i1)->(
op:=quote op;
op=rncls2(i1);
m:=quote m;
i:=quote i;
gra:=quote gra;
out:=quote out;
anztr:=quote anztr;
s1:=quote s1;
s2:=quote s2;
ug:=quote ug;
trans:=quote trans;
q:=quote q;
Rkc:=quote Rkc;
Rbb:=quote Rbb;
Rxt:=quote Rxt;
ngll:=quote ngll;
htrl:=quote htrl;
ngll=op#0;
htrl=op#1;
i1=ngll#0;
m=(rank source vars ring gens ngll#0)-1;

```

```

if m>2 then xvar:=(entries(vars ring ngll#0))#0;
if m<=2 then xvar={};
R2:=K[xvar,y_0..y_m];
if denominator(m/2)==1 then trans=transpose substitute(matrix
x {{y_0..y_2}},R2);
if denominator(m/2)!=1 then trans=transpose substitute(matrix
x {{y_0,y_1}},R2);
anztr=#htrl;
i=0;
ug=2-denominator(m/2);
if m>2 then (
while (i<anztr) do (
s1=htrl#(anztr-i-1);
s2=substitute(s1,R2);
q=0;
while (q<2+ug+2*i) do (trans=substitute(trans,{y_q=>s2_(q,0)
}),q=q+1);
i=i+1;
if i<anztr then (
q=0;
while (q<2+ug+2*i) do (trans=substitute(trans,{xvar#q=>y_q})
,q=q+1);
));
Rxt=K[xvar,y_0..y_(1+ug)];
Rncc=Rxt/substitute(i1,Rxt);
gra=(transpose substitute(syz transpose substitute(trans,Rnc
c),Rxt))*transpose(substitute(matrix({{y_0..y_(1+ug)}}),Rxt)
);
);
if even(m)==false then out=gens ker substitute(diff(substitu
te(matrix {xvar},Rxt),gra),K[y_0,y_1]);
if even(m)==true then (
Rbb=ring ngll#(#ngll-1);
Rkc=Rbb/(ideal ngll#(#ngll-1));
out=gens ker substitute(diff(substitute(matrix {xvar},Rxt),g
ra),Rkc);
out=substitute(out,{y_0=>substitute(y_0,Rbb),y_1=>substitute
(y_1,Rbb),y_2=>substitute(y_2,Rbb)});
);
{out,ngll#(#ngll-1)}
)

```

### 30.2.3 Berechnung einer Parametrisierung von $C$ aus der Parametrisierung der birational äquivalenten rationalen Normkurve und dem adjungierten Ideal

```

-- Funktion lsp2:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C vom Grad n und
-- gegebene Erzeuger
-- des adjungierten Ideals eine Parametrisierung ueber  $P^1$ 

```

```

-- fuer n ungerade oder über einer Konik fuer n gerade
-- ausgehend von einer Parametrisierung einer rationalen
-- Normkurve RNC
-- auf die C mittels der Adjungierten vom Grad n-2
-- birational abgebildet wurde
-- die Parametrisierung von RNC kann eine Parametrisierung
-- über dem  $P^1$  oder
-- über einer Konik C2 sein
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom
-- Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
-- adjungierten Ideals stehen
-- (und damit die birationale Transformation
--  $C \rightarrow RNC$ )
-- 3.Parameter: eine Liste mit 2 Elementen:
-- 0. Stelle: für  $n > 4$ :
--     eine Liste mit 2 Elementen
--     0. Stelle: birationale Transformation
--              $P^1 \rightarrow RNC$  oder  $C2 \rightarrow RNC$ 
--     1. Stelle: Gleichung von C2
--     für  $n = 4$ :
--     {0, Gleichung der Konik RNC}
-- 1. Stelle: Ideal von RNC
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer
--     3x1-Matrix ueber  $P^1$  fuer n ungerade
--     oder über einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste: Gleichung der Konik fuer n gerade sonst 0
--
lsp2=method()
lsp2(Matrix,Matrix,List):=(m0,interadj, rncl)->(
rncp:=quote rncp;
i1:=quote i1;
uvz:=quote uvz;
m:=quote m;
xvar:=quote xvar;
grr:=quote grr;
tra:=quote tra;
yva:=quote yva;
linpar:=quote linpar;
q:=quote q;
ott:=quote ott;
teiler:=quote teiler;
Rxx:=quote Rxx;
Rxt:=quote Rxt;
Rcn:=quote Rcn;
rncp=rncl#0;
i1=rncl#1;
uvz=(entries vars ring interadj)#0;

```

```

m=(rank source interadj)-1;
xvar=deepSplice({x_0..x_m});
Rxx=K[uvz,xvar];
linr=substitute(syz interadj,Rxx);
grr=(transpose linr)*(transpose (vars Rxx)_{3..(m+3)});
Rnc=(ring i1)/i1;
tra=gens ker substitute(diff((vars Rxx)_{0,1,2},grr),Rnc);
yva=(entries vars ring rncp#0)#0;
if m==2 then (
yva=(entries vars ring rncp#1)#0;
rncp={transpose matrix {yva},rncp#1}
);
mm=rank source transpose rncp#0;
Rxt=K[xvar,yva];
linpar=substitute(rncp#0,Rxt);
q=0;
while (q<mm) do (
tra=substitute(substitute(tra,Rxt),{xvar#q=>linpar_(q,0)});
q=q+1);
teiler=gcd(gcd(tra_(0,0),tra_(1,0)),tra_(2,0));
tra=matrix {{substitute(tra_(0,0)/teiler,Rxt)},{substitute(tra_(1,0)/teiler,Rxt)},{substitute(tra_(2,0)/teiler,Rxt)}};
ott={substitute(tra,ring rncp#0),rncp#1}
)
--
-----
-- Funktion lsp3:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C vom Grad n und
-- gegebene Erzeuger des adjungierten Ideals eine Parametrisierung
-- ueber P^1 fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
-- ausgehend von einer Parametrisierung einer rationalen
-- Normkurve RNC
-- auf die C mittels der Adjungierten vom Grad n-2 birational
-- abgebildet wurde
-- die Parametrisierung von RNC kann eine Parametrisierung
-- über dem P^1 oder über einer Konik C2 sein
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom
--           Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
--           adjungierten Ideals stehen
--           (und damit die birationale Transformation
--           C->RNC)
-- 3.Parameter: für n>4:
--           eine Liste mit 2 Elementen
--           0. Stelle: birationale Transformation
--                   P^1->RNC oder C2->RNC
--           1. Stelle: Gleichung von C2
--           für n=4:

```

```

--          {0,Gleichung der Konik RNC}
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer
--          3x1-Matrix ueber P^1 fuer n ungerade
--          oder über einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste: Gleichung der Konik fuer n gerade sonst 0
--
lsp3=method()
lsp3(Matrix,Matrix,List):=(m0,interadj,rncp)->(
uvz:=quote uvz;
m:=quote m;
xvar:=quote xvar;
grr:=quote grr;
yva:=quote yva;
q:=quote q;
Rxx:=quote Rxx;
Ryy:=quote Ryy;
dr:=quote dr;
ht:=quote ht;
uvz=(entries vars ring interadj)#0;
m=(rank source interadj)-1;
xvar=deepSplice({x_0..x_m});
Ryy=ring rncp#0;
if m==2 then Ryy=ring rncp#1;
yva=(entries vars Ryy)#0;
if m==2 then rncp={transpose matrix {yva},rncp#1};
Rxx=K[uvz,xvar,yva];
linr=substitute(syz interadj,Rxx);
grr=(transpose linr)*(transpose (vars Rxx)_{3..(m+3)});
dr=diff((vars Rxx)_{0,1,2},grr);
ht=dr;
rss=substitute(rncp#0,Rxx);
q=0;
while q<m+1 do (ht=substitute(ht,{xvar#q=>rss.(q,0)});q=q+1)
;
if even(m)==true then (
Rco=Ryy/ideal rncp#1;
ott=substitute(gens ker substitute(ht,Rco),Ryy)
);
if even(m)==false then ott=substitute(gens ker ht,Ryy);
{ott_{0},rncp#1})
-----
-- Funktion par3:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C vom Grad n und
-- gegebene Erzeuger des adjungierten Ideals eine Parametrisierung
-- ueber P1 fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
--
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom

```

```

--          Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
--             adjungierten Ideals stehen
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer
--             3x1-Matrix ueber P1 fuer n ungerade
--             oder über einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste: Gleichung der Konik fuer n gerade
--             sonst 0
-- 2.Stelle der Liste: birationale Transformation C->P1 bzw.
--             C->Konik
--
par3=method()
par3(Matrix,Matrix):=(m0,interadj)->(
i1=quote i1;
rncp:=quote rncp;
paragl:=quote paragl;
m:=quote m;
xvar:=quote xvar;
i1=ideal rnc(m0,interadj);
xvar=(entries vars ring i1)#0;
m=(degree m0_(0,0))#0-2;
if m==2 then (
Rca=K[xvar,y_0,y_1,y_2];
mgil=substitute(mingens i1,{xvar#0=>substitute(y_0,Rca),xvar
#1=>substitute(y_1,Rca),xvar#2=>substitute(y_2,Rca)});
mgil=substitute(mgil,K[y_0,y_1,y_2])
);
if m==2 then rncp={0,mgil} else rncp=rncpar(i1);
-- paragl=lsp2(m0,interadj,{rncp,i1});
paragl=lsp3(m0,interadj,rncp);
paragl)
--
-----
--
-- Funktion otpar3:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C vom Grad n und
-- gegebene Erzeuger des adjungierten Ideals eine Parametrisierung
-- ueber P1 fuer n ungerade oder über einer Konik fuer n gerade
-- optimiert fuer n ungerade diese Parametrisierung
-- und testet die Parametrisierung
--
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom
--             Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
--             adjungierten Ideals stehen
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer

```

```

--                                     3x1-Matrix ueber P1 fuer n ungerade
--                                     oder über einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste: Gleichung der Konik fuer n gerade
--                               sonst 0
-- 2.Stelle der Liste: Test der Parametrisierung 0-Matrix
--                               falls OK
--
otpar3=method()
otpar3(Matrix,Matrix):=(m0,interadj)->(
i1=quote i1;
para:=quote para;
ueber:=quote ueber;
paraopt:=quote paraopt;
m:=quote m;
xvar:=quote xvar;
i1=ideal rnc(m0,interadj);
xvar=(entries vars ring i1)#0;
m=(degree m0_(0,0))#0-2;
if m==2 then (
Rca=K[xvar,y_0,y_1,y_2];
mg11=substitute(mingens i1,{xvar#0=>substitute(y_0,Rca),xvar
#1=>substitute(y_1,Rca),xvar#2=>substitute(y_2,Rca)});
mg11=substitute(mg11,K[y_0,y_1,y_2])
);
if m==2 then rncp={0,mg11} else rncp=rncpar(i1);
paragl=lsp3(m0,interadj,rncp);
para=paragl#0;
ueber=paragl#1;
print para;
m=(degree m0_(0,0))#0-2;
if denominator(m/2)==1 then paraopt=para;
if denominator(m/2)!=1 then paraopt=optpar(para,ring para);
test=testpar(m0,paraopt,ueber);
{paraopt,ueber,test})
-----
-- Funktion par2:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C vom Grad n und
-- gegebene Erzeuger des adjungierten Ideals eine Parametrisierung
-- ueber P1 fuer n ungerade
-- oder über einer Konik fuer n gerade
-- Unterscheidet sich von par3 dadurch daß zunächst die
-- birationale Transformation RNC->C berechnet wird
-- und dann die Parametrisierung von RNC eingesetzt wird
--
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom
--               Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
--               adjungierten Ideals stehen
--
-- Ausgabe: eine Liste

```

```

-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer
--                       3x1-Matrix ueber P1 fuer n ungerade
--                       oder ueber einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste: Gleichung der Konik fuer n gerade
--                       sonst 0
-- 2.Stelle der Liste: birationale Transformation C->P1 bzw.
--                       C->Konik
--
par2=method()
par2(Matrix,Matrix):=(m0,interadj)->(
i1=quote i1;
rncp:=quote rncp;
paragl:=quote paragl;
m:=quote m;
xvar:=quote xvar;
i1=ideal rnc(m0,interadj);
xvar=(entries vars ring i1)#0;
m=(degree m0_(0,0))#0-2;
if m==2 then (
Rca=K[xvar,y_0,y_1,y_2];
mgi1=substitute(mingens i1,{xvar#0=>substitute(y_0,Rca),xvar
#1=>substitute(y_1,Rca),xvar#2=>substitute(y_2,Rca)});
mgi1=substitute(mgi1,K[y_0,y_1,y_2])
);
if m==2 then rncp={0,mgi1} else rncp=rncpar(i1);
paragl=lsp2(m0,interadj,{rncp,i1});
paragl)
--
-----
--
-- Funktion otpar2:
-- Berechnet für eine rationale ebene Kurve C vom Grad n und
-- gegebene Erzeuger des adjungierten Ideals eine Parametrisierung
-- ueber P1 fuer n ungerade oder über einer Konik fuer n gerade
-- optimiert fuer n ungerade diese Parametrisierung
-- und testet die Parametrisierung
-- Unterscheidet sich von par3 dadurch, daß zunächst die
-- birationale Transformation RNC->C berechnet wird
-- und dann die Parametrisierung von RNC eingesetzt wird
--
-- 1.Parameter: 1x1-Matrix in der die Gleichung von C vom
--               Grad n steht
-- 2.Parameter: 1x(n-1)-Matrix in der minimale Erzeuger des
--               adjungierten Ideals stehen
--
-- Ausgabe: eine Liste
-- 0.Stelle der Liste: Parametrisierung von C in einer
--                       3x1-Matrix ueber P1 fuer n ungerade
--                       oder über einer Konik fuer n gerade
-- 1.Stelle der Liste: Gleichung der Konik fuer n gerade

```



```

rdmat:=quote rdm;
rdmatsat:=quote rdmatsat;
phi:=quote phi;
adjsat:=quote adjsat;
pkt1x:=quote pkt1x;
pktb:=quote pktb;
dim5:=quote dim5;
mdim5:=quote mdim5;
Rx:=ring m0;
n=(degree(m0_(0,0)))#0;
iadj2=ideal interadj;
iadj1=intersect(iadj2,(ideal vars Rx)^(n-1));
Krd:=ZZ/11;
rdmat=substitute(random(Krd^(n-1),Krd^(1)),Rx);
rdmatsat=substitute(random(Krd^(n-1),Krd^(1)),Rx);
phi=interadj*rdmat;
adjsat=interadj*rdmatsat;
pkt1x=ideal(phi_(0,0),m0_(0,0));
pkta=saturate(pkt1x,ideal adjsat_(0,0));
rdmat=substitute(random(Krd^(n-1),Krd^(1)),Rx);
rdmatsat=substitute(random(Krd^(n-1),Krd^(1)),Rx);
phi=interadj*rdmat;
adjsat=interadj*rdmatsat;
pkt1x=ideal(phi_(0,0),m0_(0,0));
pktb=saturate(pkt1x,ideal adjsat_(0,0));
dim5=intersect(pkta,pktb,iadj1);
mdim5=mingens dim5;
(mdim5)_{0,1,2}
-----

-- Funktion g11:
-- Berechnet einen g11 fuer eine ebene projektive
rationale Kurve C
-- 1.Parameter: Gleichung der Kurve C in einer 1x1-Matrix
-- 2.Parameter: minimale Erzeuger des adjungierten Ideals
-- 3.Parameter: Ideal eines Punktes auf C (z.B. aus apkt)
-- (alle ueber dem selben Ring)
-- Ausgabe:
-- eine 1x2-Matrix mit dem Linearsystem
--
g11=method()
g11(Matrix,Matrix,Ideal):=(m0,interadj,ipkt)->(
mzg:=mingens intersect(ideal g22(m0,interadj),ipkt);
mzg_{0,1})
-----

-- Funktion par12:
-- 1. Parameter: Gleichung einer ebenen projektiven
rationalen Kurve
-- 2. Parameter: g11 oder g22 auf der Kurve, geben durch
eine 1x2(3)-Matrix
-- (beides ueber dem selben Polynomring in 3 Variablen)

```

```

-- Ausgabe: eine Liste
-- 1. Stelle: Parametrisierung der Kurve ueber dem  $P^1$  bzw.
ueber einer Konik im  $P^2$ 
-- eine 3x1-Matrix
-- 2. Stelle: 0 bzw. Gleichung der Konik in einer 1x1-Matrix
--
par12=method()
par12(Matrix,Matrix):=(m0,linpar)->(
ug:=quote ug;
trans:=quote trans;
uvz:=quote uvz;
q:=quote q;
ri:=quote ri;
cu:=quote cu;
rdsat2:=quote rdsat2;
tttmat:=quote tttmat;
tttid:=quote tttid;
ttid:=quote ttid;
graid:=quote graid;
ma1:=quote ma1;
uvz:=quote uvz;
pp:=quote pp;
mm:=quote mm;
ilngl:=quote ilngl;
iltr:=quoteiltr;
nglm:=quote nglm;
mx:=quote mx;
mdn:=quote mdn;
ug=(rank source linpar)-2;
Rx:=ring m0;
uvz=(entries vars ring m0)#0;
Rl:=K[uvz,y_0..y_(1+ug)];
ri=substitute(mingens ideal linpar,Rl);
Krd=ZZ/11;
rdsat2=substitute(random(Krd^(2+ug),Krd^(1)),Rl);
ris=ri*rdsat2;
cu=substitute(m0,Rl);
tttmat=matrix append(entries ri,(entries substitute(vars(K[y
_0..y_(1+ug)]),Rl))#0);
tttid=minors(2,tttmat);
ttid=ideal matrix {append((entries gens tttid)#0,cu_(0,0))};
graid=saturate(ttid,ideal ris);
ma1=gens graid;
testll(List):=(elem)->(di=diff(substitute(matrix vars Rx,Rl)
,elem#0);if ((substitute(di,{uvz#0=>0,uvz#1=>0,uvz#2=>0})==d
i) and (di!=0)) then true else false);
pp=0;
ilngl={};
iltr={};
while (pp<rank source ma1) do (if substitute(ma1_{pp},{uvz#0

```

```

=>0,uvz#1=>0,uvz#2=>0})==ma1_{pp} then ilngl=append(ilngl,pp
);pp=pp+1);
pp=0;
while (pp<rank source ma1) do (tesg=testll({ma1_(0,pp)});if
tesg==true then iltr=append(iltr,pp),pp=pp+1);
mm=ma1_iltr;
nglm=ma1_ilngl;
mx=substitute(matrix {uvz},R1);
mdn=diff(mx,transpose mm);
if ug==0 then transfor=gens ker mdn;
Ry=K[y_0..y_(1+ug)];
if ug==1 then Sngl=Ry/(ideal substitute(nglm,Ry));
if ug==1 then transfor=gens ker substitute(mdn,Sngl);
{substitute(transfor,Ry),substitute(nglm,Ry)}
Die folgende Funktion findet Familien von glatten Punkten auf  $C$  und ver-
sucht heuristisch rationale glatte Punkte auf  $C$  zu finden:
-- Funktion apkt:
-- findet heuristisch Familien von glatten Punkten auf einer
-- ebenen projektiven Kurve  $C$ 
-- 1.Parameter: Gleichung der Kurve  $C$  in einer 1x1-Matrix
-- 2.Parameter: minimale Erzeuger des adjungierten Ideals
-- Ausgabe: Eine Liste
-- 1.Stelle: Eine Liste mit den Idealen der Familien von
-- glatten Punkten
-- 2.Stelle: Eine Liste mit Idealen von rationalen glatten Punkten,

-- falls welche gefunden wurden
apkt=method()
apkt(Matrix,Matrix):=(m0,interadj)->(
n:=quote n;
q:=quote q;
qq:=quote qq;
pktl:=quote pktl;
pkte:=quote pkte;
rdmat:=quote rdmat;
phi:=quote phi;
rdmatsat:=quote rdmatsat;
adjsat:=quote adjsat;
pkt1x:=quote pkt1x;
pkt1:=quote pkt1;
mpkt1:=quote mpkt1;
Rx:=ring m0;
n=(degree(m0_(0,0)))#0;
q=0;
pktl={};
pkte={};
while ((q<n-1)) do (
rdmat=(id_(Rx^(n-1)))_{q};
phi=interadj*rdmat;
qq=0;

```

```

if qq==0 then qq=1;
while qq<n-1 do (
rdmatsat=(id_(Rx^(n-1)))_{qq};
adjsat=interadj*rdmatsat;
pkt1x=ideal(phi_(0,0),m0_(0,0));
pkt1=saturate(pkt1x,ideal adjsat_(0,0));
if (qq==0 and qq==1) then pkt1=append(pkt1,pkt1);
if (q!=0 or qq!=1) then (if (pkt1!=pkt1#(pkt1-1)) then pkt1
=append(pkt1,pkt1));
mpkt1=mingens pkt1;
if (((rank source mpkt1)==2) and ((degree(mpkt1_(0,0)))#0==1
) and ((degree(mpkt1_(0,1)))#0==1)) then pkte=append(pkte,pk
t1);
qq=qq+1;
if qq==q then qq=qq+1);
q=q+1);
{pkt1,pkte})
Beispielrechnung:
-- Beispiel:
K=QQ
Rx=K[u,v,z]
m0= matrix {{29493/322*u^4*v^2-14409/70*u^3*v^3-18691/920*z*
u^4*v+1561249/6440*z*u^3*v^2+4757/140*z*u^2*v^3-320539/3220*
u^4*z^2-4129/6440*z^2*u^3*v-452397/6440*z^2*u^2*v^2+z^2*u*v^
3+3443/140*z^3*u^3+z^3*u^2*v+z^3*u*v^2+z^3*v^3}}
adj=matrix {{u*v^2*z-23/36*u^2*z^2-3/8*u*v*z^2+1/72*v^2*z^2,
u^2*v*z-25/36*u^2*z^2-5/8*u*v*z^2+23/72*v^2*z^2, u^3*z-35/3
6*u^2*z^2-3/8*u*v*z^2+25/72*v^2*z^2, u^2*v^2-377/432*u^2*z^2
-15/32*u*v*z^2+295/864*v^2*z^2, u^3*v-391/432*u^2*z^2-17/32*
u*v*z^2+377/864*v^2*z^2}}
m0=matrix {{u^4-14*u^2*v^2+v^4+8*u^2*v*z+8*v^3*z}}
adj=matrix {{v^2, u*v, u^2}}
lt=apkt(m0,adj)
ipkt=lt#1#0
linpar=g11(m0,adj,ipkt)
pa=(par12(m0,linpar))#0
op=optpar(pa,ring pa)
fi=openOut 'dpara.txt'
fi<<'m0 = '<<name(m0)<<endl<<endl
fi<<'adj = '<<name(adj)<<endl<<endl
fi<<'lt = '<<name(lt)<<endl<<endl
fi<<'ipkt = '<<name(ipkt)<<endl<<endl
fi<<'linpar = '<<name(linpar)<<endl<<endl
fi<<'pa = '<<name(pa)<<endl<<endl
fi<<'op = '<<name(op)<<endl<<endl
close fi

```

## 31 Optimierung der Höhe von Parametrisierungen

Die folgende Funktion optimiert mit dem Verfahren aus Abschnitt 18 eine Parametrisierung einer irreduziblen projektiven rationalen Kurve:

```
-- Funktion optpar
--
-- Optimiert eine Parametrisierung einer ebenen irreduziblen
-- projektiven rationalen Kurve
--
-- Input:
-- 1. Stelle: Parametrisierung der Kurve in einer 3x1-Matrix
-- 2. Stelle: Ein Polynomring über QQ, der als Variablen die
-- Parametervariablen der Parametrisierung der Kurve hat
-- Output:
-- Optimierte Parametrisierung der Kurve in einer 3x1-Matrix
-- mit Eintraegen in demselben Ring wie die Input-Parametrisierung
--
--
optpar=method()
optpar(Matrix, Ring):=(transfor, Ryy)->(
n:=quote n;
coeffl:=quote coeffl;
q:=quote q;
coffmat:=quote coffmat;
nenner:=quote nenner;
teiler:=quote teiler;
transfor2:=quote transfor2;
transfor3:=quote transfor3;
transfor4:=quote transfor4;
gt0:=quote gt0;
gt1:=quote gt1;
gt2:=quote gt2;
gt:=quote gt;
teile:=quote teile;
yv:=(entries(substitute(vars Ryy, ring transfor)))#0;
n=(degree (transfor)_(0,0))#0;
coeffl={};
q=n;
while q>-1 do (coeffl=append(coeffl, (entries transpose matrix
x((1/(q!*(n-q)!))* (entries substitute(diff(substitute(yv#0^q
*yv#1^(n-q), ring transfor), transfor), QQ))))#0); q=q-1);
coffmat=transpose matrix coeffl;
q=0;
nenner=1;
lcm(List):=(ll)->(numerator(ll#0*ll#1/gcd(ll#0, ll#1)));
while q<3 do (qq=0; while qq<n+1 do (nenner=lcm({nenner, denom
inator(coffmat_(q, qq)})); qq=qq+1); q=q+1);
coffmat=substitute(nenner*coffmat, ZZ);
```

```

transfor2=transfor*nenner;
q=0;
teiler=coffmat_(0,0);
while q<3 do (qq=0;while qq<n+1 do (teiler=gcd(teiler,coffma
t_(q,qq));qq=qq+1);q=q+1);
coffmat=substitute(matrix(1/teiler*entries(coffmat)),ZZ);
transfor3=matrix(1/teiler*entries(transfor2));
gt0=gcd(coffmat_(0,0),coffmat_(0,n-1));
gt1=gcd(coffmat_(1,0),coffmat_(1,n-1));
gt2=gcd(coffmat_(2,0),coffmat_(2,n-1));
gt=gcd(gcd(gt0,gt1),gt2);
gta=gt;
if ((gcd(coffmat_(0,0),gt^n)==gt^n) and (gcd(coffmat_(1,0),g
t^n)==gt^n) and (gcd(coffmat_(2,0),gt^n)==gt^n)) then teile=
true;
if teile=true then transfor4=substitute(transfor3,{yv#0=>sub
stitute(yv#0,ring transfor)/gt});
transfor4=substitute(transfor4,ring transfor);
coeffl={};
q=n;
while q>-1 do (coeffl=append(coeffl,(entries transpose matrix
((1/(q!*(n-q)!))*entries substitute(diff(substitute(yv#0^q
*yv#1^(n-q),ring transfor),transfor4),QQ))))#0);q=q-1);
coffmat=transpose matrix coeffl;
nenner=1;
q=0;
while q<3 do (qq=0;while qq<n+1 do (nenner=lcm({nenner,denom
inator(coffmat_(q,qq)}));qq=qq+1);q=q+1);
coffmat=substitute(nenner*coffmat,ZZ);
transfor4=transfor4*nenner;
gt0=gcd(coffmat_(0,1),coffmat_(0,n));
gt1=gcd(coffmat_(1,1),coffmat_(1,n));
gt2=gcd(coffmat_(2,1),coffmat_(2,n));
gt=gcd(gcd(gt0,gt1),gt2);
teile=false;
if ((gcd(coffmat_(0,n),gt^n)==gt^n) and (gcd(coffmat_(1,n),g
t^n)==gt^n) and (gcd(coffmat_(2,n),gt^n)==gt^n)) then teile=
true;
if teile=true then transfor5=substitute(transfor4,{yv#1=>sub
stitute(yv#1,ring transfor)*(1/gt)});
coeffl={};
q=n;
while q>-1 do (coeffl=append(coeffl,(entries transpose matrix
((1/(q!*(n-q)!))*entries substitute(diff(substitute(yv#0^q
*yv#1^(n-q),ring transfor),transfor5),QQ))))#0);q=q-1);
coffmat=transpose matrix coeffl;
nenner=1;
q=0;
while q<3 do (qq=0;while qq<n+1 do (nenner=lcm({nenner,denom
inator(coffmat_(q,qq)}));qq=qq+1);q=q+1);

```

```

transfor5=transfor5*nenner;
print ''Verbesserung:'';
print (yv#0,gta,''^',n);
print (yv#1,gt,''^',n);
transfor5)
--
--
-- Beispiel:
-- K=QQ
-- Ry=K[y_0,y_1]
-- transfor = matrix {{-363528*y_0^9+475308*y_0^8*y_1+246402
*y_0^7*y_1^2-556227*y_0^6*y_1^3+176418*y_0^5*y_1^4+66339*y_0
^4*y_1^5-54675*y_0^3*y_1^6+16038*y_0^2*y_1^7-2916*y_0*y_1^8+
243*y_1^9}, {110808*y_0^9-32076*y_0^8*y_1-217242*y_0^7*y_1^2
+83835*y_0^6*y_1^3+112995*y_0^5*y_1^4-60507*y_0^4*y_1^5-7290
*y_0^3*y_1^6+7290*y_0^2*y_1^7-729*y_0*y_1^8}, {3064473*y_0^9
-4643730*y_0^8*y_1-489159*y_0^7*y_1^2+2461104*y_0^6*y_1^3-27
2646*y_0^5*y_1^4-190998*y_0^4*y_1^5+85293*y_0^3*y_1^6-18225*
y_0^2*y_1^7+2916*y_0*y_1^8-243*y_1^9}}
-- optpar(transfor,Ry)

```

## Literatur

- [1] F. ATIYAH, I.G. MACDONALD, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley (1969)
- [2] Allen ALTMAN, Steven KLEIMAN, Introduction to Grothendieck Duality Theory, Springer (1970)
- [3] W. BARTH, C. PETERS, A. VAN DE VEN, Compact Complex Surfaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Folge 3, Band 4, Springer (1984)
- [4] Giannina BECCARI, Carla MASSAZA, The Polars as Adjoint Curves, Bollettino U.M.I Algebra e Geometria, Serie VI, Vol. II-D, N. 1-1984 (1984)
- [5] David A. BUCHSBAUM, David EISENBUD, Some Structure Theorems for Finite Free Resolutions, Advances in Mathematics 12, 84-139 (1974)
- [6] A. BRILL, M. NOETHER, Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Math. Ann. 7 (1874) 269-310.
- [7] Winfried BRUNS, Jürgen HERZOG, Cohen-Macaulay rings, Cambridge University Press (1996)
- [8] Ciro CILIBERTO, Ferruccio ORECCHIA, Adjoint Ideals to Projective Curves are Locally Extended Ideals, Bollettino U.M.I. (6) 3-B (1984), 39-52
- [9] David COX, John LITTLE, Donal O'SHEA, Ideals, Varieties and Algorithms, Springer (1992)
- [10] L. E. DICKSON, Modern Elementary Theory of Numbers, The University of Chicago Press (1965)
- [11] David EISENBUD, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Springer (1995)
- [12] J. EAGON, D. NORTHCOTT, Ideals defined by matrices and a certain complex associated to them, Proc. Royal Soc. a269 (1962), 188-204
- [13] William FULTON, Algebraic Curves, The Benjamin/Cummings Publishing Company (1969)
- [14] A. V. GERAMITA, P. MAROSCIA, The Ideal of Forms Vanishing at a Finite Set of Points in  $\mathbb{P}^n$ , Journal of Algebra 90, 528-555 (1984)
- [15] Daniel GORENSTEIN, An Arithmetic Theory of Adjoint Plane Curves, Trans.Amer.Math.Soc 72 (1952) 414-436.
- [16] Silvio GRECO, Paolo VALABREGA, On the theory of adjoints, Lect. Notes in Math. 732 (1979), 99-123.
- [17] Wolfgang GRÖBNER, Algebraische Geometrie II, BI-Hochschulschriften (1970)
- [18] Joe HARRIS, Algebraic Geometry, Springer (1992)

- [19] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Springer (1977)
- [20] HILBERT, HURWITZ, Über die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null, Acta math. 14, 217-224 (1890)
- [21] E. HILLGARTER, F. WINKLER, Points on Algebraic Curves and the Parametrization Problem, RISC-Linz (1997)
- [22] Sze-Tsen HU, Introduction to HOMOLOGICAL ALGEBRA, Holden-Day Inc. (1968)
- [23] Mark VAN HOEIJ, Rational Parametrisations of Algebraic Curves using a Canonical Divisor, J. Symbolic Computation 23, 209-227 (1997)
- [24] Mark VAN HOEIJ, An Algorithm for Computing an Integral Basis in an Algebraic Function Field, J. Symbolic Computation 18, 353-363 (1994)
- [25] Mark VAN HOEIJ, An Algorithm for Computing the Weierstrass Normal Form (1995)
- [26] O.-H. KELLER, Vorlesungen über algebraische Geometrie, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. (1974)
- [27] Anna LORENZINI, Betti Numbers of points in projective space, Journal of Pure and Applied Algebra 63 (1990)
- [28] Anna LORENZINI, Betti Numbers of perfect homogeneous ideals, Journal of Pure and Applied Algebra 60 (1989)
- [29] Michal MŇUK, An Algebraic Approach to Computing Adjoint Curves, J. Symbolic Computation 23, 229-240 (1997)
- [30] L. J. MORDELL, Diophantine Equations, Academic Press (1969)
- [31] David MUMFORD, Algebraic Geometry I, Springer (1976)
- [32] M. NOETHER, Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen (1883)
- [33] T. SAKKALIS, R. FAROUKI, Singular Points of Algebraic Curves, J. Symbolic Computation 9, 405-421
- [34] A. SEIDENBERG, Elements of the Theory of Algebraic Curves, Addison-Wesley (1968)
- [35] Jean-Pierre SERRE, Algebraic groups and class fields, Springer (1988)
- [36] R. Y. SHARP, Steps in Commutative Algebra, Cambridge University Press (1990)
- [37] Henning STICHTENOTH, Algebraic Function Fields and Codes, Springer (1993)
- [38] J. Rafael SENDRA, Franz WINKLER, Symbolic Parametrization of Curves, J. Symbolic Computation 12, 607-631 (1991)

- [39] J. Rafael SENDRA, Franz WINKLER, Parametrization of Algebraic Curves over Optimal Field Extensions, *J. Symbolic Computation* 23, 191-207 (1997)
- [40] I. R. SHAFAREVICH, *Basic Algebraic Geometry*, Springer (1974)
- [41] P. STADELMEYER, F. WINKLER, Computing the System of Adjoint Plane Curves by Puiseux Expansion, RISC-Linz (1997)
- [42] Robert J. WALKER, *Algebraic Curves*, Princeton University Press (1950)
- [43] Oscar ZARISKI, Pierre SAMUEL, *Commutative Algebra*, Springer (1975)